Homework12 答案

December 9, 2020

1. 某二能级系统的能量为E_1, E_2, 非简并。在能量表象下，其矩阵是对角矩阵。现在考虑加上微扰H'，其矩阵为

$$H' = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ b & a \end{array} \right]$$

试求能级的精确解，再利用微扰法计算能级到二级近似，波函数到一级近似。

解：（1）求能级精确解。设H的本征矢为$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, 对应的本征值为E，则本征方程为

$$\begin{pmatrix} E_1 + a & b \\ b & E_2 + a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

解得

$$\begin{aligned} E_1' &= \frac{1}{2}(E_1 + E_2 + 2a - \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4b^2}) \\ E_2' &= \frac{1}{2}(E_1 + E_2 + 2a + \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4b^2}) \end{aligned}$$

如果$|b| \ll |E_1 - E_2|$，则能级近似为(假设$E_1 < E_2$)

$$\begin{aligned} E_1' &\approx E_1 + a - \frac{b^2}{E_2 - E_1} \\ E_2' &\approx E_2 + a + \frac{b^2}{E_2 - E_1} \end{aligned}$$

(2) 微扰论求解。利用非简并微扰论二级近似公式

$$E_n' = E_n + H_{nn}' + \sum_k{}' \frac{|H_{kn}'|^2}{E_n - E_k}$$

得到

$$\begin{aligned} E_1' &\approx E_1 + a - \frac{b^2}{E_2 - E_1} \\ E_2' &\approx E_2 + a + \frac{b^2}{E_2 - E_1} \end{aligned}$$

波函数一级近似项为

$$
\begin{aligned}
\psi_n^{(1)} &= \sum_k{}' \frac{H'_{kn}}{E_n - E_k}\psi_k^{(0)} \\
\psi_1^{(1)} &= \frac{H'_{21}}{E_1 - E_2}\psi_2^{(0)} = \frac{b}{E_1 - E_2}\psi_2^{(0)} \qquad (1) \\
\psi_2^{(1)} &= \frac{H'_{12}}{E_2 - E_1}\psi_1^{(0)} = \frac{b}{E_2 - E_1}\psi_1^{(0)} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

把$\psi_2^{(0)} = (0,1)^T, \psi_1^{(0)} = (1,0)^T$带入（1），（2）式，得到：

$$
\psi_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{E_1 - E_2} \end{pmatrix} \qquad (3)
$$

$$
\psi_2^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{b}{E_2 - E_1} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4)
$$

所以：

$$
\psi_1 = \psi_1^{(0)} + \psi_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{E_1 - E_2} \end{pmatrix} \qquad (5)
$$

$$
\psi_2 = \psi_2^{(0)} + \psi_2^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{b}{E_2 - E_1} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6)
$$

2 无穷深势阱(宽度为a), 在中点位置受到微扰H'，强度为γ的dirac函数。求各能级的变化到一级。并讨论微扰方法可行的条件。

解：设势场为

$$
V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, x > a \\ 0, & 0 \le x \le a \end{cases}
$$

微扰为

$$
H' = \gamma\delta(x - \frac{a}{2})
$$

$H^{(0)}$的本征值和波函数为

$$
\begin{aligned}
E_n^{(0)} &= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \\
\psi_n^{(0)} &= \sqrt{\frac{2}{a}} sin\frac{n\pi}{a}x, \quad 0 \le x \le a \\
n &= 1, 2, \cdots
\end{aligned}
$$

能级的一级修正为

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= \langle n|H'|n\rangle \\ &= \frac{2\gamma}{a}\int_0^a sin^2\frac{n\pi x}{a}\delta(x-\frac{a}{2})dx \\ &= \frac{2\gamma}{a}sin^2\frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

为了使微扰方法可行，须有

$$E_n^{(1)} \ll E_n^{(0)}$$

当n为偶数时，$E_n^{(1)}=0$, 不论γ取多大均满足；当n为奇数时，$E_n^{(1)}=\frac{2\gamma}{a}$,

$$\begin{aligned} \frac{2\gamma}{a} &\ll \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \\ \gamma &\ll \frac{\pi^2\hbar^2}{4ma} \end{aligned}$$

因此必须有

$$\gamma \ll \frac{\pi^2\hbar^2}{4ma}$$

3.球面上带电粒子（又称三维转子）在磁场（z方向）中的哈密顿量可以写为$H=kL^2+\omega L_z$ (因为L_z正比于磁矩，后者是磁矩的势能)。现在加上x方向微弱磁场，可以认为是加上$H'=\lambda L_x$ (a) 利用微扰法求能级到二级近似。（b）想办法严格求解。（提示：寻找一个方向$\vec{n}$,使得L_n正比于$\omega L_z+\lambda L_x$)

解：(a) 因为H能级全部非简并，可以直接用非简并微扰来处理。H的共同本征态为$|l,m\rangle$, 能级的零级修正为

$$E_{lm}^{(0)} = l(l+1)k\hbar^2+m\omega\hbar$$

在H'的微扰下，能级的一级修正

$$E_{l,m}^{(1)} = \langle l,m|H'|l,m\rangle = 0$$

二级修正为

$$E_{l,m}^{(2)} = \sum_{l,m}{}' \frac{|H'_{(l',m'),(l,m)}|^2}{E_{l,m}^{(0)}-E_{l',m'}^{(0)}}$$

利用关系式

$$\langle l',m'|L_x|l,m\rangle = \frac{\hbar}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\delta_{l,l'}\delta_{m-1,m'}+\frac{\hbar}{2}\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\delta_{l,l'}\delta_{m+1,m'}$$

我们得到

$$E_{l,m}^{(2)} = \frac{\lambda^2\hbar}{4\omega}[(l+m)(l-m+1)-(l-m)(l+m+1)] = \frac{m\lambda^2\hbar}{2\omega}$$

因此，能级的二级近似为

$$E_{l,m} \approx E_{l,m}^{(0)} + E_{l,m}^{(1)} + E_{l,m}^{(2)} = l(l+1)k\hbar^2 + m\omega\hbar + \frac{m\lambda^2\hbar}{2\omega}$$

(b) 取$\gamma = \sqrt{\omega^2+\lambda^2}, L_n = \frac{\omega}{\gamma}L_z + \frac{\lambda}{\gamma}L_x$. 令$cos\theta = \frac{\omega}{\gamma}, sin\theta = \frac{\lambda}{\gamma}$. 可知，$L_n$为$\vec{L}$在$\vec{n} = (\theta, 0)$方向的投影。哈密顿量为

$$\tilde{H} = H + H' = k\vec{L}^2 + \gamma L_n$$

对应本征值分别为

$$\begin{aligned} E_{l,m} &= l(l+1)k\hbar^2 + m\hbar\sqrt{\omega^2+\lambda^2} \\ &\approx l(l+1)k\hbar^2 + m\omega\hbar(1+\frac{\lambda^2}{2\omega^2}+\cdots) \end{aligned}$$