Homework16 答案

January 11, 2021

1 二能级系统$E_2 - E_1 = \hbar\omega > 0$. $t < 0$时处于基态。$t > 0$后受到扰动H'. H'在H_0表象下矩阵元为$H'_{11} = H'_{22} = 0, H'_{12} = H'_{21} = \hbar\nu$. 求解$|\Psi(t)\rangle$, 计算系统处于激发态的几率。并与微扰论的结果比较。

解：$t > 0$时，在H_0表象下体系哈密顿量表示为(取$E_1 = -\hbar\omega/2$)

$$H = H_0 + H' = \begin{pmatrix} E_2 & \hbar\nu \\ \hbar\nu & E_1 \end{pmatrix} = (E_1 + \frac{1}{2}\hbar\omega)I_{2\times 2} + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega & 2\nu \\ 2\nu & -\omega \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega & 2\nu \\ 2\nu & -\omega \end{pmatrix}$$

令无微扰时系统的本征函数为ϕ_1, ϕ_2; 对应能级为E_1, E_2, 设H的本征函数为

$$\psi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

代入本征方程

$$H\psi = E\psi$$

令$\omega' = \sqrt{\omega^2 + 4\nu^2}, \cos\theta = \frac{\omega}{\omega'}, \sin\theta = \frac{2\nu}{\omega'}$, 于是$\begin{pmatrix} \omega & 2\nu \\ 2\nu & -\omega \end{pmatrix}$可以写为$\omega'\vec{n}\cdot\sigma$, 其中$n_x = \sin\theta, n_z = \cos\theta$. 根据$\sigma_n$的本征方程解，我们知道

$$E_+ = \frac{\hbar}{2}\omega',\ \psi_+ = \begin{pmatrix} cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$
$$E_- = -\frac{\hbar}{2}\omega',\ \psi_- = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$t = 0$时，系统初始状态为

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos\frac{\theta}{2}\psi_+ - \sin\frac{\theta}{2}\psi_-$$

因此$t > 0$时波函数为

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \cos\frac{\theta}{2}e^{-iE_+t/\hbar}\psi_+ - \sin\frac{\theta}{2}e^{-iE_-t/\hbar}\psi_- \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2}e^{-iE_+t/\hbar} + \sin^2\frac{\theta}{2}e^{-iE_-t/\hbar} \\ \frac{1}{2}\sin\theta(e^{-iE_+t/\hbar} - e^{-iE_-t/\hbar}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

系统处于激发态的概率为

$$p=|\frac{1}{2}\sin\theta(e^{-iE_+t/\hbar}-e^{-iE_-t/\hbar})|^2=(\frac{2\nu}{\omega'})^2\sin^2(\frac{\omega' t}{2})\approx(\frac{2\nu}{\omega})^2\sin^2(\frac{\omega t}{2})$$

微扰法求解：基态跃迁到激发态的概率为

$$P_{1\to 2}=|\frac{1}{i\hbar}\int_0^t H'_{21}e^{i\omega_{21}t'}dt'|^2=(\frac{2\nu}{\omega})^2\sin^2(\frac{\omega t}{2})$$

其中$\omega_{21}=(E_2-E_1)/\hbar=\omega$. $H'_{21}=\hbar\nu$.

2. 带电一维谐振子在电磁波作用下可以发生跃迁。假设电磁波波长远大于谐振子振幅(可在局部视为匀强电场)，请写出跃迁选择定则。

解：电子在电磁场中会受到电场和磁场的作用。忽略磁场作用，我们只考虑电场的偶极相互作用，视为微扰$H'=ex\epsilon\cos(\omega t)$. $\epsilon\cos(\omega t)$ 是电磁波的电场强度。

跃迁几率$P_{n\to n'}$与矩阵元$|x_{n'n}|^2$成正比。当$|x_{n'n}|=0$时，跃迁几率为0. 故跃迁几率$P_{n\to n'}\neq 0$的条件为$|x_{n'n}|\neq 0$

$$x_{n'n}=(\phi_{n'},x\phi_n)$$

在线性谐振子的情况下，利用

$$x\phi_n=\frac{1}{\alpha}[\sqrt{\frac{n}{2}}\phi_{n-1}+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\phi_{n+1}]$$

得到

$$x_{n'n}=\frac{1}{\sqrt{2}\alpha}[\sqrt{n}\delta_{n',n-1}+\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}]$$

可见，要使$|x_{n'n}|\neq 0$,必须

$$n'=n-1\ or\ n'=n+1$$

即

$$\Delta n=\pm 1$$

3. 氢原子处于基态，受到脉冲电场$\vec{\epsilon}(t)=\vec{\epsilon}_0\delta(t)$的作用。计算它跃迁到各个激发态的几率。

解：自由氢原子的哈密顿量记为H_0。以$\vec{\epsilon}$的方向为z轴，则微扰为

$$H'=e\epsilon(t)\cdot\vec{r}=e\epsilon_0 z\delta(t). \tag{1}$$

初始条件为

$$\psi(t=0^-)=\psi_{100}(\vec{r})\to C_n(0^-)=\delta_{n1} \tag{2}$$

t时刻处于$n=(n,l,m)$态的几率幅为

$$C_n(t)=\frac{1}{i\hbar}\int_0^t e\epsilon_0 z_{n1}\delta(\tau)e^{i(E_n-E_1)\tau/\hbar}d\tau \tag{3}$$

这里$z_{n1} = \psi_n^+ z \psi_1$, n表示一组好量子数(n, l, m).
再对t积分，由$t = 0^- \to t > 0$, 既得

$$C_n(t) = \frac{e\epsilon_0}{i\hbar} z_{n1}, \tag{4}$$

因此$t > 0$时（即脉冲电场作用后）电子跃迁到ψ_n态概率为

$$P_n = |C_n(t)|^2 = (\frac{e\epsilon}{\hbar})^2 |z_{n1}|^2 \tag{5}$$

选择定则就是z_{n1}不为零的条件。根据

$$\cos\theta Y_{lm} = aY_{l+1,m} + bY_{l-1,m} \tag{6}$$

我们知道选择定则$(\Delta l = \pm 1,\ \Delta m = 0)$, 终态量子数必须是

$$(nlm) = (n10) \tag{7}$$

即电子只能跃迁到np态$(l = 1)$, 而且磁量子数$m = 0$.