Homework5 答案

2018 年 10 月 17 日

1. 证明$S_z = \frac{\hbar}{2}(|+,z><+,z| - |-,z><-,z|)$.
证明:
法1：设任意态$|\alpha>$可以分解为$|\alpha>= a|+,z> + b|-,z>$,其中a,b为复数，且$|a|^2 + |b|^2 = 1$。
将S_z作用于$|\alpha>$上:

$$\begin{aligned} S_z|\alpha> &= aS_z|+,z> + bS_z|-,z> \\ &= \frac{\hbar}{2}a|+,z> - \frac{\hbar}{2}b|-,z> \end{aligned} \tag{1}$$

再将$\frac{\hbar}{2}(|+,z><+,z| - |-,z><-,z|)$作用于$|\alpha>$上,并利用正交归一关系:

$$\begin{aligned} <+,z|+,z> &= 1 \\ <-,z|-,z> &= 1 \\ <-,z|+,z> &= 0 \\ <+,z|-,z> &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

得到

$$\frac{\hbar}{2}(|+,z><+,z| - |-,z><-,z|)|\alpha> = \frac{\hbar}{2}a|+,z> - \frac{\hbar}{2}b|-,z> \tag{3}$$

比较式(1)、(3)，可知$S_z = \frac{\hbar}{2}(|+,z><+,z| - |-,z><-,z|)$.

法2：由完备性关系：$|+,z><+,z| + |-,z><-,z| = 1$及$S_z|+,z>= \frac{\hbar}{2}|+,z>$,$S_z|-,z>= -\frac{\hbar}{2}|-,z>$

$$\begin{aligned} S_z|\alpha\rangle &= (S_z|+,z><+,z| + S_z|-,z><-,z|)|\alpha\rangle \\ &= (\frac{\hbar}{2}|+,z><+,z| - \frac{\hbar}{2}|-,z><-,z|)|\alpha\rangle \\ &= (\frac{\hbar}{2}(|+,z><+,z| - |-,z><-,z|))|\alpha\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

即证。

2. 考虑由$|1>,|2>,|3>$是某力学量的正交归一本征态。某右矢$|\alpha>=i|1>-2|2>-i|3>$，另一右矢$|\beta>=i|1>+2|3>$. (1) 写出两个右矢的对应左矢；(2) 求出$<\alpha|\beta>,<\beta|\alpha>$; (3) 将两右矢归一化.
解：(1)

$$\begin{aligned} <\alpha| &= (|\alpha>)^\dagger \\ &= (i|1>-2|2>-i|3>)^\dagger \\ &= -i<1|-2<2|+i<3| \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} <\beta| &= (|\beta>)^\dagger \\ &= -i<1|+2<3| \end{aligned} \tag{6}$$

(2). 由（1）易得

$$\begin{aligned} <\alpha|\beta> &= (-i<1|-2<2|+i<3|)(i|1>+2|3>) \\ &= -i*i<1|1>+i*2<3|3> \\ &= 1+2i \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} <\beta|\alpha> &= (<\alpha|\beta>)^\dagger \\ &= (1+2i)^* \\ &= 1-2i \end{aligned} \tag{8}$$

(3)

$$\begin{aligned} <\alpha|\alpha> &= (-i<1|-2<2|+i<3|)(i|1>+2|3>)(i|1>-2|2>-i|3>) \\ &= 1+4+1=6 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} <\beta|\beta> &= (-i<1|+2<3|)(i|1>+2|3>) \\ &= 1+4=5 \end{aligned} \tag{10}$$

则归一化右矢为

$$\begin{aligned} |\alpha'> &= \frac{1}{\sqrt{<\alpha|\alpha>}}|\alpha> \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}(i|1>-2|2>-i|3>) \\ &= \frac{i}{\sqrt{6}}|1>-\frac{2}{\sqrt{6}}|2>-\frac{i}{\sqrt{6}}|3> \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} |\beta'> &= \frac{1}{\sqrt{<\beta|\beta>}}|\beta> \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(i|1>+2|3>) \\ &= \frac{i}{\sqrt{5}}|1>+\frac{2}{\sqrt{5}}|3> \end{aligned} \tag{12}$$

3.设$|n>,|k>$力学量F的本征态矢，属于不同本征值。算符G与F对易，证明$<k|G|n>=0$.
证明：法1：设$F|k>=F_k|k>,F|n>=F_n|n>$

$$\begin{aligned} 0 &= <k|[G,F]|n> \\ &= <k|GF-FG|n> \\ &= <k|GF|n>-<k|FG|n> \\ &= <k|GF_n|n>-<k|F_kG|n> \\ &= (F_n-F_k)<k|G|n> \end{aligned} \tag{13}$$

因为$F_n \neq F_k$,所以必有$<k|G|n>=0$，即证。
法2：由G与F对易，有$GF=FG$

$$\begin{aligned} G(F|n>) &= G(F_n|n>) \\ F(G|n>) &= F_n(G|n>) \end{aligned} \tag{14}$$

即$G|n>$也为算符F的属于本征值F_n的本征态。又因为F_k，F_n为不同本征值，它们相应的本征态彼此正交，所以：$<k|G|n>=0$，即证。

4. 对两个算符X,Y,证明: $Tr(XY)=Tr(YX)$. 如果 X,Y 是厄米算符，XY并不一定是厄米的。但是证明$\frac{1}{2}(XY+YX),\frac{1}{2i}(XY-YX)$是厄米的。
证明：(1) 设$|i>$是正交归一的完备基矢，则有

$$Tr(XY) = \sum_i <i|XY|i> \tag{15}$$

在XY中间插入完备性关系$\sum_j |j><j|=1$，得到

$$Tr(XY) = \sum_{i,j} <i|X|j><j|Y|i>$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j} <j|Y|i><i|X|j> \\ &= \sum_{j} <j|YX|j> \\ &= Tr(YX) \end{aligned} \tag{16}$$

即证。

(2) 由厄米算符的性质$(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger = YX$可知，如果$XY \neq YX, i.e.\ [X,Y] \neq 0$,则$XY$不是厄米算符。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(XY+YX)^\dagger &= \frac{1}{2}(XY)^\dagger + \frac{1}{2}(YX)^\dagger \\ &= \frac{1}{2}YX + \frac{1}{2}XY \\ &= \frac{1}{2}(XY+YX) \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2i}(XY-YX))^\dagger &= -\frac{1}{2i}(XY)^\dagger + \frac{1}{2i}(YX)^\dagger \\ &= \frac{1}{2i}XY - \frac{1}{2i}YX \\ &= \frac{1}{2i}(XY-YX) \end{aligned} \tag{18}$$

说明$\frac{1}{2}(XY+YX), \frac{1}{2i}(XY-YX)$都是厄米的。

5.定义反厄米算符： $Q^+ = -Q.$

(1) 证明一个反厄米算符的本征值是个虚数。

(2) 证明两个厄米算符的对易式是反厄米的。（两个算符的对易式定义为$[A,B] \equiv AB - BA$)

(3) 两个反厄米算符的对易式是怎样的?

(1)证明:设算符Q的本征态$|q>$,本征值为q,有：

$$Q|q>=q|q> \tag{19}$$

等式两边分别取厄米共轭

$$<q|Q^+ = q^* <q| \tag{20}$$

根据反厄米算符定义式有：

$$<q|(-Q) = q^* <q| \tag{21}$$

(19)式两边左乘$< q|$

$$< q|Q|q > = < q|q|q > = q < q|q > \tag{22}$$

（21)式两边右乘$|q >$

$$\begin{aligned} < q|(-Q)|q > &= q^* < q|q > \\ < q|Q|q > &= -q^* < q|q > \end{aligned} \tag{23}$$

比较式（22），(23)，可得

$$q = -q^* \tag{24}$$

即本征值q为虚数。

(2)

$$\begin{aligned} [A,B]^+ &= (AB-BA)^+ \\ &= B^+A^+ - A^+B^+ \\ &= BA - AB \\ &= -(AB-BA) \end{aligned} \tag{25}$$

所以两厄米算符的对易式是反厄米的。

(3)取两个反厄米算符C, D

$$\begin{aligned} [C,D]^+ &= (CD-DC)^+ \\ &= D^+C^+ - C^+D^+ \\ &= (-D)(-C) - (-C)(-D) \\ &= DC - CD \\ &= -[C,D] \end{aligned} \tag{26}$$

所以两个反厄米算符的对易式也是反厄米的。