Homework8 答案

December 14, 2019

1. 写出动量表象中一维谐振子的定态薛定谔方程，与位置表象对比，得出基态和第一激发态的动量表象波函数. 解:

$$\langle p|H|E\rangle = E\langle p|E\rangle \tag{1}$$

$$(\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\partial^2}{\partial p^2})\varphi_E(p) = E\varphi_E(p)$$

定义$m' = \frac{1}{m\omega^2}$, 方程形式上与坐标表象方程一样。所以解出来的波函数$\varphi_E(p)$与$\psi_E(x)$一样，只要用p替代x, $\alpha' = \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}$替代$\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$

2. 利用坐标算符的本征方程$\hat{x}|x'\rangle = x'|x'\rangle$, 得到其波函数本征方程和本征波函数. 解

$$\langle x|\hat{x}|x'\rangle = x'\langle x|x'\rangle$$

$$x\langle x|x'\rangle = x'\langle x|x'\rangle x\delta(x-x') = x'\delta(x-x')$$

x是算符，$\delta(x-x')$是本征波函数，x'是本征值

3. 证明坐标表象下动量算符是厄米的。（考虑正常可归一化波函数在无穷远处为零）

解：设坐标表象下有波函数$\psi(x),\phi(x)$,动量算符为$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

$$\begin{aligned}
(\psi(x), \hat{p}\phi(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\phi(x)dx \\
&= -i\hbar(\psi^*(x)\phi(x))\mid_{-\infty}^{\infty} + i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)d\psi^*(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(i\hbar\frac{\partial\psi(x)^*}{\partial x})\phi(x)dx \\
&= (\hat{p}\psi(x), \phi(x))
\end{aligned}$$

所以$\hat{p}$是厄米的，证毕。

4.利用波函数写出一维谐振子坐标x和动量p的矩阵。

解:求能量表象下，x,p的矩阵即是求以能量本征态为基矢的矩阵元。

由第4次作业的第1,2题知：($\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$)

$$x\psi_n(x) = \frac{1}{\alpha}[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1} + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x)] \tag{2}$$

$$p\psi_n(x) = -i\hbar\alpha[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x)] \tag{3}$$

所以，x的矩阵元为：

$$x_{mn} =< \psi_m|x|\psi_n >= \frac{1}{\alpha}[\sqrt{\frac{n+1}{2}}\delta_{m,n+1} + \sqrt{\frac{n}{2}}\delta_{m,n-1}] \tag{4}$$

矩阵为：

$$\frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & & \vdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \sqrt{3} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \sqrt{n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sqrt{n} & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

p的矩阵元为：

$$p_{mn} =< \psi_m|p|\psi_n >= i\hbar\alpha[\sqrt{\frac{n+1}{2}}\delta_{m,n+1} - \sqrt{\frac{n}{2}}\delta_{m,n-1}] \tag{6}$$

矩阵为：

$$\frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & & \vdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \sqrt{3} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & -\sqrt{n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sqrt{n} & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

5. 对于$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$，求证：在任何束缚定态$p$的期望值为零。
证明：设束缚定态为$|n > \exp(-iEt/\hbar)$, 能量本征值为E
因为，

$$\begin{aligned} [x, H] &= [x, \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})] \\ &= [x, \frac{{p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2}{2m}] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2m}[x, {p_x}^2] \\
&= \frac{1}{2m}(p_x[x, p_x] + [x, p_x]p_x) \\
&= \frac{1}{2m} \times 2i\hbar p_x \\
&= \frac{i\hbar}{m} p_x
\end{aligned} \tag{8}
$$

所以，

$$
\begin{aligned}
< p_x > &= \frac{m}{i\hbar} < [x, H] > \\
&= \frac{m}{i\hbar} < n|(xE - Ex)|n > \\
&= \frac{m}{i\hbar}(E - E) < n|x|n >
\end{aligned} \tag{9}
$$

对于束缚定态，其在无穷远处出现几率为0，可保证$< n|x|n >$不是无穷大，所以$< p_x >= 0$. 同理可得$< p_y >=< p_z >= 0$，所以束缚态下动量的期望值恒为0.