Homework9 答案

1. 利用对易关系，证明在L_z的本征态，L_x, L_y的期望值为零。

证明：设L_z的本征态为$|m>$，$L_z|m>= m\hbar|m>$. 并且$<m|L_z =<m|m\hbar$.
利用对易关系易得

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{1}{i\hbar}[L_y, L_z] \quad (1)\\ L_y &= \frac{1}{i\hbar}[L_z, L_x] \quad (2)\\ <m|L_x|m> &= <m|L_x|m> \\ &= \frac{1}{i\hbar} <m|[L_y, L_z]|m> \\ &= \frac{1}{i\hbar} <m|L_yL_z - L_zL_y|m> \\ &= \frac{1}{i\hbar} <m|m\hbar L_y - m\hbar L_y|m> \\ &= 0 \quad (3)\\ <m|L_y|m> &= <m|L_y|m> \\ &= \frac{1}{i\hbar} <m|[L_z, L_x]|m> \\ &= \frac{1}{i\hbar} <m|L_zL_x - L_xL_z|m> \\ &= \frac{1}{i\hbar} <m|m\hbar L_x - m\hbar L_x|m> \\ &= 0 \quad (4) \end{aligned}$$

2. 定义$\vec{n} = (\theta, \phi)$方向角动量$L_n = \vec{n}\cdot\vec{L}$，证明$L_n$与$\vec{L}^2$对易
证明：在直角坐标系中，$\vec{n} = sin\theta cos\phi\vec{e_x} + sin\theta sin\phi\vec{e_y} + cos\theta\vec{e_z}$

$$L_n = \vec{n}\cdot\vec{L} = sin\theta cos\phi L_x + sin\theta sin\phi L_y + cos\theta L_z \quad (5)$$

则

$$\begin{aligned} [L_n, \vec{L}^2] &= [sin\theta cos\phi L_x + sin\theta sin\phi L_y + cos\theta L_z, L^2] \\ &= sin\theta cos\phi[L_x, L^2] + sin\theta sin\phi[L_y, L^2] + cos\theta[L_z, L^2] \quad (6) \end{aligned}$$

其中

$$[L_x, L^2] = [L_x, L_x^2 + L_y^2 + L_z^2]$$

$$
\begin{aligned}
&= [L_x, L_y^2] + [L_x, L_z^2] \\
&= L_y[L_x, L_y] + [L_x, L_y]L_y + L_z[L_x, L_z] + [L_x, L_z]L_z \\
&= 2i\hbar L_y L_z - 2i\hbar L_y L_z \\
&= 0 \qquad (7)
\end{aligned}
$$

同理$[L_y, L^2] = [L_z, L^2] = 0$，所以$[L_n, L^2] = 0.$

3.计算$\vec{L}^2, L_z$的共同本征态下，L_x, L_y的标准偏差。
解：前面已经证明在L_z的本征态下

$$
\begin{aligned}
< L_x > &= 0 \qquad (8) \\
< L_y > &= 0 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

利用对易关系可得

$$
\begin{aligned}
L_x^2 &= \frac{1}{i\hbar} L_x [L_y, L_z] \\
&= \frac{1}{i\hbar}(L_x L_y L_z - L_x L_z L_y) \\
&= \frac{1}{i\hbar}(L_x L_y L_z - L_x L_z L_y + L_z L_x L_y - L_z L_x L_y) \\
&= \frac{1}{i\hbar}(L_x L_y L_z - L_z L_x L_y) + L_y^2 \qquad (10) \\
< lm|L_x^2|lm > &= \frac{1}{i\hbar} < lm|(L_x L_y L_z - L_z L_x L_y)|lm > + < lm|L_y^2|lm > \\
&= < lm|L_y^2|lm > \qquad (11)
\end{aligned}
$$

注意：这里证明$< L_x^2 > = < L_y^2 >$也可以利用角动量升降算符，即

$$
< l, m|(\frac{L_+ + L_-}{2})^2|l, m > = < l, m|(\frac{L_+ - L_-}{2i})^2|l, m > \qquad (12)
$$

因此

$$
\begin{aligned}
< L_x^2 > &= < l, m|L_x^2|l, m > \\
&= \frac{1}{2} < l, m|\vec{L}^2 - L_z^2|l, m > \\
&= \frac{1}{2}[l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2] \qquad (13) \\
< L_y^2 > &= < L_x^2 > = \frac{1}{2}[l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2] \qquad (14) \\
\Delta L_x &= \sqrt{< L_x^2 > - < L_x >^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}[l(l+1) - m^2]}\hbar \qquad (15) \\
\Delta L_y &= \sqrt{\frac{1}{2}[l(l+1) - m^2]}\hbar \qquad (16)
\end{aligned}
$$

4.设粒子处于$\vec{L}^2$的$l = 1$本征态。利用坐标轮换，求$\vec{L}^2, L_x$的共同本征函数，表示成Y_{lm}的线性叠加。
解: 已知$\vec{L}^2, L_z$的共同本征态为球谐函数，$l = 1$的本征态为:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x+iy}{r} &(17)\\ Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r} &(18)\\ Y_{1-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x-iy}{r} &(19)\end{aligned}$$

利用坐标轮换，$z \to x, x \to y, y \to z$, 得到$\vec{L}^2, L_x$的共同本征函数(用$Y^x_{lm}$表示$\vec{L}^2, L_x$的共同本征态)

$$\begin{aligned} Y^x_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{y+iz}{r}\\ &= -\frac{i}{2}(Y_{11}+Y_{1-1}) - \frac{i}{\sqrt{2}}Y_{10} &(20)\\ Y^x_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{x}{r}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(Y_{1-1}-Y_{11}) &(21)\\ Y^x_{1-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{y-iz}{r}\\ &= \frac{i}{2}(Y_{11}+Y_{1-1}) - \frac{i}{\sqrt{2}}Y_{10} &(22)\end{aligned}$$

这里的坐标轮换大家可以理解为只是坐标轴的名称按照轮换关系变换，且这种坐标轮换可以保证坐标系永远是右手坐标系。

5.利用[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B,证明:
(a).$[x^n, p] = i\hbar n x^{n-1}$.
(b).$[f(x), p] = i\hbar\frac{df(x)}{dx}$.
(c).$[x, p^n] = -i\hbar n p^{n-1}$
证明：(a)对易关系式中若包含幂函数形式，采用数学归纳法是最为方便的，此处我们考虑用数学归纳法对(a)和(c)进行证明，先来证明(a).
(i)$n = 1$时，$[x, p] = i\hbar$显然是成立的;
(ii)假设$n = k$时，$[x^k, p] = i\hbar k x^{k-1}$成立;
(iii)则$n = k + 1$时,

$$\begin{aligned}[x^{k+1}, p] &= [x^k * x, p]\\ &= x^k[x,p] + [x^k,p]x\\ &= x^k * (i\hbar) + (i\hbar k x^{k-1}) * x\\ &= i\hbar(k+1)x^k &(23)\end{aligned}$$

仍然成立，原式得证！
(b)该证明有两种办法，其一就是将对易式作用于任意波函数$\Psi(x)$上，求作用结果；其二就是将$f(x)$展开成幂级数的形式.
第一种:

$$\begin{aligned}
[f(x),p]\psi(x) &= f(x)p\psi(x)-p(f(x)\psi(x)) \\
&= f(x)(-i\hbar\frac{d}{dx})\psi(x)-f(x)(-i\hbar\frac{d}{dx})\psi(x)-\psi(x)(-i\hbar\frac{d}{dx})f(x) \\
&= \psi(x)[i\hbar\frac{df(x)}{dx}]
\end{aligned}$$

所以

$$[f(x),p]=i\hbar\frac{df(x)}{dx} \tag{24}$$

第二种:
设$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+,\cdots$,并考虑(a)的证明结果,

$$\begin{aligned}
[f(x),p] &= [a_0+a_1x+a_2x^2+,\cdots,p] \\
&= [a_0,p]+[a_1x,p]+[a_2x^2,p]+\cdots \\
&= i\hbar(a_1+2a_2+3a_3x^2+,\cdots) \\
&= i\hbar\frac{df(x)}{dx}
\end{aligned} \tag{25}$$

(c)仿照(a)的证明即可！