量子力学第十次作业

1 证明Heisenberg Picture 下自旋角动量对易式$[S_x^{(H)}, S_y^{(H)}] = i\hbar S_z^{(H)}$. 如果$S_y^{(H)}(t) = S_y^{(S)}\cos(\omega t) - S_z^{(S)}\sin(\omega t)$, 初态$|\alpha(0)\rangle = |+, z\rangle$, 请问测量$S_y(t)$的可能测值和相应概率的时间演化. $S_y^{(H)}$的本征态是什么?

2 质量m电荷q的粒子在匀强电场中运动(场强ϵ). 已知$t=0$时$\langle x\rangle = 0, \langle p_x\rangle = p_0$. 利用Heisenberg方程计算$\langle x(t)\rangle, \langle p_x(t)\rangle$.

3 带电q的粒子在z方向磁场中运动。哈密顿近似为$H = p^2/2m - \omega L_z, \omega = qB/(2mc)$.
(a)已知$t=0$时刻，$\langle \mathbf{p}\rangle = (p_0, 0, 0)$, 求$t>0$时$\langle \mathbf{p(t)}\rangle$.
(b)指出守恒量。

4 对于一维谐振子.
(a)处于能量本征态$|n\rangle$. 利用代数方法求动能期望值和势能期望值，及其标准差。(提示：将动能算符表示成$a, a^\dagger$的函数)
(b) 初态$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1$, 在S-pic和H-pic下分别计算$\langle p\rangle$.

5 设谐振子初态为相干态$|\alpha\rangle$. 请
(a)计算量子数算符$a^\dagger a$的期望值和标准偏差。
(b) 计算动量的期望值随时间变化情况和标准偏差。在什么情况下此标准偏差可以忽略?

6 考虑轨道角动量。限定$l=1$, 取基矢为$|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle$.
(a)利用代数方法求L_x, L_y矩阵表示及本征值和本征矢量.
(b) 将L^2, L_x的共同本征函数，表示成Y_{lm}的线性叠加。

7 考虑谐振子升降算符$a, a^\dagger$的线性变换

$$b = \lambda a + \nu a^\dagger$$

λ, ν为实数，满足$\lambda^2 - \nu^2 = 1$. 证明：对于b的任意本征态$|\beta\rangle$有$\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2$.
(提示：证明$[b, b^\dagger] = 1$, 再用$b, b^\dagger$表示x, p).

8 (选作) 某体系能量算符为$H = \frac{5}{3}a^\dagger a + \frac{2}{3}(a^2 + {a^\dagger}^2)$. $[a, a^\dagger] = 1$. 求体系的能谱（所有能量本征态）和基态波函数. （提示，类似上题，引入$b = ua + va^+$, 使得$[b, b^\dagger] = 1$，将H表示成$b^\dagger b$的函数. 此做法为著名的Bogliubov变换).