

量子力学第十一次

0 求证

$$[x_i, F(\mathbf{p})] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad (1)$$

$$[p_i, G(\mathbf{x})] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x_i}. \quad (2)$$

1 定义径向动量算符 $p_r = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r)$, 证明:

(1) p_r 是厄米的

(2) $p_r = -i\hbar(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r})$

(3) $[r, p_r] = i\hbar$

(4) $p_r^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r = -\hbar^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}$ (注意: 微分算符后面跟有波函数).

2 根据中心力问题的径向波函数 χ 本征方程, 利用 Hellmann 定理证明: l 越大, 能量 E 越大。

3 粒子在对数形式中心力场 $V(r) = -V_0 \ln(r/r_0)$ 中运动。利用 Hellman 或维里定理证明: (a) 各束缚定态的动能期望值相同. (b) 能级间距不随粒子质量变。

4 计算基态氢原子的 $\Delta x, \Delta p_x$, 验证测不准关系。

5 (1) 一个粒子在半径为 R 的刚球内自由运动 (无限深球形势井)。请计算 s 态能级和波函数, 球壁受的压力为多大? (压力可根据粒子对球壁做功等于能量变化来计算) (2) 如果粒子在半径 R_1 到 R_2 的球壳内自由运动, 请计算 s 波能级和波函数。

6 单价原子的外层电子(价电子)所受原子核及内层电子的平均作用势能可以写为

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} - \lambda a \frac{Ze^2}{r^2}$$

(λ 为一小量, a 为玻尔半径)

试求价电子能级。与类氢原子能级比较, 给出主量子数的修正公式。(提示: 将势能第二项与离心“势能”合并).