量子力学第二次作业

1 粒子在一维势场中运动。$\psi_n(x), \psi_m(x)$是属于E_n, E_m的能量本征函数。$E_n \neq E_m$. 证明它们正交。即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x = 0$$

（假设波函数是可归一化的，即无穷远处波函数为零）

2 假设一个粒子的初始态是两个能量本征态(E_2, E_1)的叠加

$$\Psi(x, 0) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x)$$

设c_1, c_2, ψ_1, ψ_2为实数, $\Psi(x, 0)$已经归一化. 计算$t > 0$ 时刻$\langle x(t)\rangle$.

3 证明对任意两个满足薛定谔方程的归一化解$\Psi_1(x, t), \Psi_2(x, t)$有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^*\Psi_2\mathrm{d}x = 0$$

4 Schrödinger 方程分离变量解中的E必须是实数. (提示：假设其实复数，那么波函数在任何时间归一化要求其虚部为零).

5 Griffiths书，习题1.15

描述一个自发衰变粒子，其寿命为τ.

$$P(t) = \int |\Psi(x, t)|^2\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

要得到这个几率衰减，可以设$V(x) = V_0(x) - i\Gamma$, 其中V_0是真实的势能，Γ是正实数。

证明：

$$\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = -\frac{2\Gamma}{\hbar}P$$

求出$P(t)$, 并给出以Γ表示的粒子寿命.

6 计算$\mathrm{d}\langle p\rangle/\mathrm{d}t$. 结果类似于牛顿定律, 是后面讲到的Ehrenfest 定理的一个形式, 它告诉我们力学量的期望值遵从经典力学规律。

7 考虑一个无限深势阱(阱宽a)中粒子. 如果环境温度为T, 且k_BT 远小于E_3. 根据热学知识，粒子处于E_n 的几率正比于$\exp(-E_n/(k_BT))$. 计算粒子的能量期望值$< E >$和比热c. （提示：比热的定义是$d < E > /dT$)

8 计算一维无限深势井内束缚定态ψ_n的位置不确定度Δx和动量不确定度Δp.

9 计算讲义Eq. (2.19) 波函数下$\langle x\rangle$. 你会发现它是时间震荡的. 周期又什么决定?