

量子力学第六次作业

- 0 证明 $[L_x, L_y]\psi(x, y, z) = i\hbar L_z\psi(x, y, z)$. L_x, L_y, L_z 是坐标表象下角动量算符的三个分量。
- 1 在 S_z 表象下, 求解 S_y 的本征方程, 写出本征值和本征矢.
- 2 一个自旋1/2粒子处于 $|+, z\rangle$ 态, 计算 $\langle S_y \rangle, \langle S_x \rangle$. (请使用两种方式计算: 1. 根据量子力学测量原理, 同时回答测量值与相应几率; 2. 利用期望值的矩阵计算公式)
- 3 \mathbf{n} 为任意方向 (θ, ϕ) 的单位矢量, $\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ 为泡里算符在该方向的投影。(也就是将Stern-Galach装置沿 \mathbf{n} 方向设置, 观察该方向的偏转).
- (1) 写出 S_z 表象下, σ_n 的矩阵表示, 并求出本征值和本征矢. 是不是跟你预期的一样?
- (2) 对于 σ_n 的两个本征矢分别计算 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 的期望值和标准偏差。
- (3) 如果处于 σ_n 的+1本征态的一束中性自旋1/2粒子通过沿 x 方向设置的Stern-Galach装置, 会分裂成几束? 强度比是多少? (强度比就是粒子数比)
- (4) 如果中性1/2粒子通过 x 方向设置的Stern-Galach装置后, 取 $S_x = \hbar/2$ 的一束, 让它通过沿 \mathbf{n} 方向设置的SG装置, 请问分成几束? 强度比是多少?
- 4 设某二能级系统的哈密顿量为

$$H = \epsilon(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

这里 $|1\rangle, |2\rangle$ 是正交归一完备基。求 H 的本征值和归一化的本征矢。请用 H 的本征矢为基矢写出 H 的矩阵。

- 5 证明: $e^{ia\sigma_z} = \cos a + i\sigma_z \sin a$, 其中 a 是常数。(算符函数的定义是: $f(A) = \sum_n f^{(n)} A^n / n!$, $f^{(n)}$ 是函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数)
- 6 (选作) 证明 $e^{-i\mathbf{S}/\hbar \cdot \mathbf{z}(\pi/2)}|+x\rangle = e^{-i(\sigma_z/2)(\pi/2)}|+x\rangle = |+y\rangle e^{i\gamma}$, γ 是一个常数。以上操作是绕 z 轴逆时针‘旋转’态矢, 对应 $\boldsymbol{\sigma}$ 的期望值绕 z 轴逆时针旋转 $\pi/2$ 。再证明 σ_n 的正本征矢可以由两次旋转得到: 首先绕 y 轴转 θ 角, 然后绕 z 轴转 ϕ 角