朗道能级

郭文安

2011 年 10 月 1 日

考虑带电粒子（比如电子）在均匀磁场B中的运动. 设磁场方向为z. 忽略z方向的自由运动, 其Hamiltonian为

$$H = \frac{1}{2m_e}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{e^2B^2}{8m_ec^2}(x^2 + y^2) + \frac{eB}{2m_ec}L_z \tag{1}$$

定义$\omega_L = \frac{eB}{2m_ec}$, 上式可写为

$$H = \frac{1}{2m_e}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m_e\omega_L^2(x^2 + y^2) + \omega_L L_z \tag{2}$$

这可以看在$x - y$平面内的二维简谐振子,外加角动量带来的能量.

采用极坐标求解H, L_z的共同本征态和能量本征值. 能量本征值为

$$E_{n_r,m} = E_N + m\hbar\omega_L = (2n_r + |m| + 1)\hbar\omega_L + m\hbar\omega_L = (2n_r + |m| + m + 1)\hbar\omega_L. \tag{3}$$

这就是著名的Landau能级. 相应本征函数为

$$\psi_{n_r,m}(r, \phi) = R_{n_r,m}(r, \phi)e^{im\phi}. \tag{4}$$

这一波函数被称为Landau波函数, 其中$R_{n_r,m}(r, \phi)$为径向波函数,

$$R_{n_r,m}(r, \phi) = r^{|m|}e^{-\alpha^2r^2/2}F(-n_r, |m| + 1, \alpha^2r^2) \tag{5}$$

F为合流超几何函数. $\alpha = \sqrt{m_e\omega_L/\hbar}$.

下面就是Landau波函数在不同的径向量子数n_r和角动量量子数m下描述的$x - y$平面内的几率分布(亮度对应几率大小)和径向波函数情况.

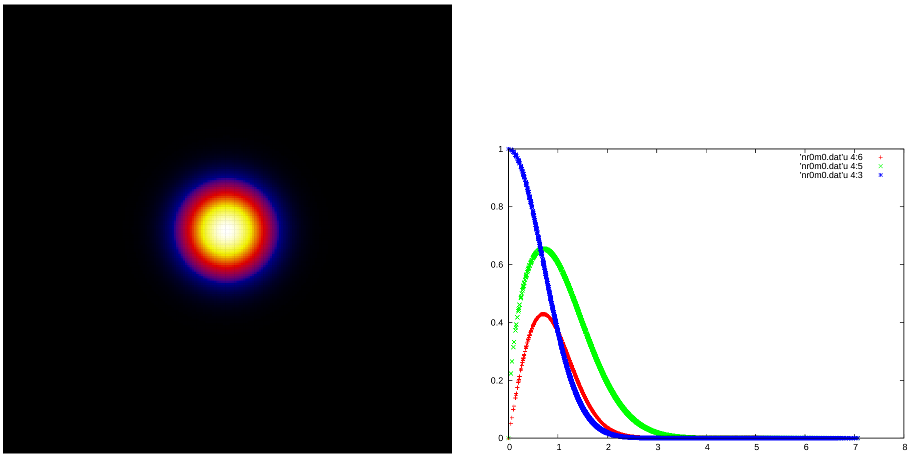


图 1 $n_r = 0, m = 0$, 左图几率密度分布，右图径向几率密度(蓝色表示R^2, 红色表示r到$r + dr$圆环内的径向几率密度，绿色表示约化径向波函数$Rr^{1/2}$.

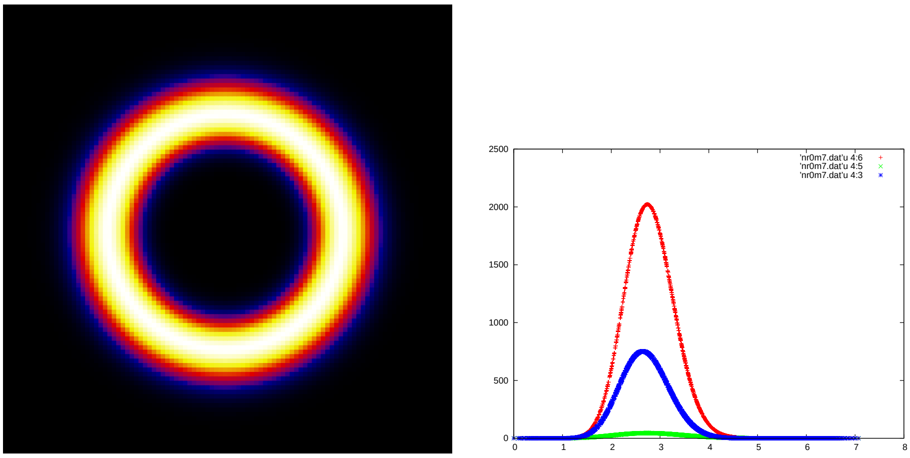


图 2 $n_r = 0, m = 7$, 左图几率密度分布，右图径向几率密度(蓝色表示R^2, 红色表示r到$r + dr$圆环内的径向几率密度，绿色表示约化径向波函数$Rr^{1/2}$.

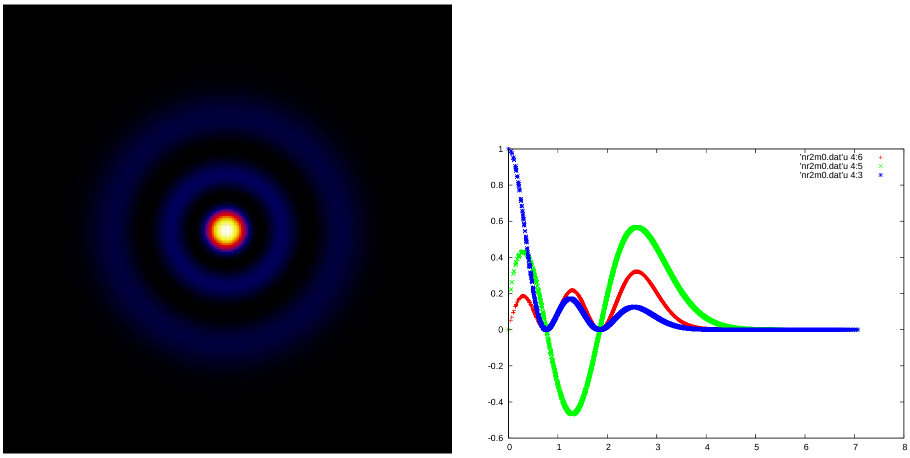


图 3 $n_r = 2, m = 0$, 左图几率密度分布，右图径向几率密度(蓝色表示R^2, 红色表示r到$r + dr$圆环内的径向几率密度，绿色表示约化径向波函数$Rr^{1/2}$.

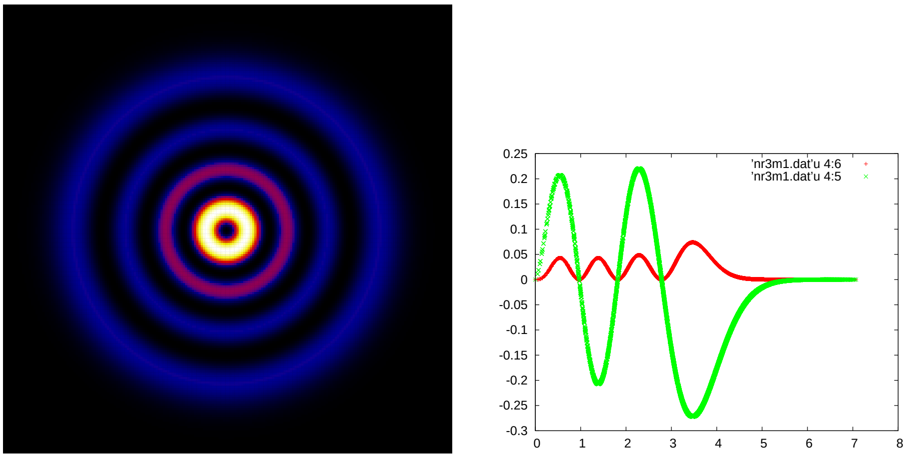
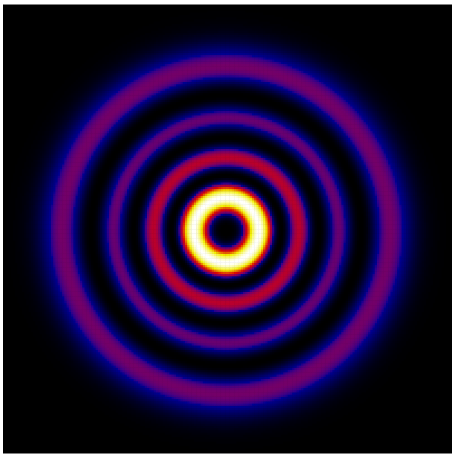


图 4 $n_r = 3, m = 1$, 左图几率密度分布，右图径向几率密度(红色表示r到$r + dr$圆环内的径向几率密度，绿色表示约化径向波函数$Rr^{1/2}$.



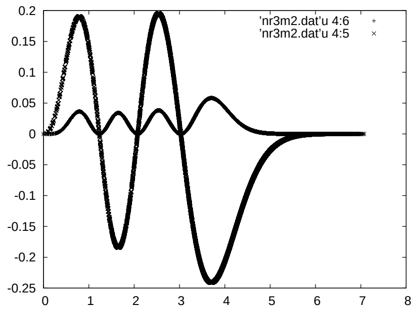
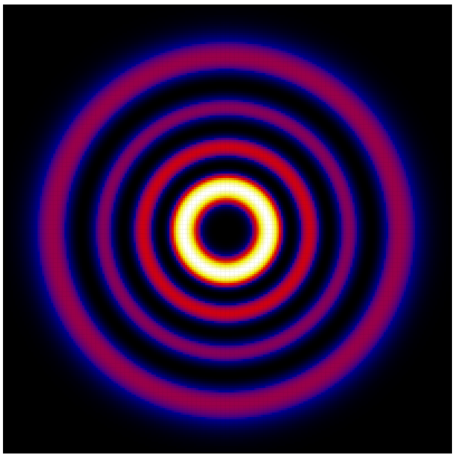


图 5 $n_r = 3, m = 2$, 左图几率密度分布，右图径向几率密度(分别为r到$r + dr$圆环内的径向几率密度和约化径向波函数$Rr^{1/2}$.



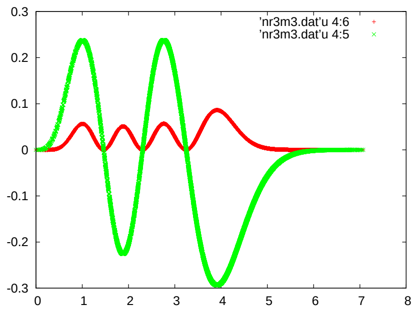


图 6 $n_r = 3, m = 2$, 左图几率密度分布，右图径向几率密度(红色表示r到$r + dr$圆环内的径向几率密度，绿色表示约化径向波函数$Rr^{1/2}$.