3.12 相容与不相容力学量，测不准关系

我们知道如果两个力学量A,B的算符对易, 那么它们有一系列共同本征态. 系统如果处于这样的状态, 我们可以同时准确知道A,B的测值. 比如$|a,b\rangle$是A,B的共同本征态。

$$A|a,b\rangle = a|a,b\rangle; \qquad B|a,b\rangle = b|a,b\rangle \tag{3.298}$$

那么测A，我们百分之百得到a; 系统的态由于是A的本征态，测量后不塌缩。再测B，我们百分之百得到b. 颠倒顺序，情况也一样。比如在Y_{lm}态下测量L^2, L_z.

这种情况称A和B是相容的(compatible).

但是, 如果A,B的算符不对易. 我们称它们是不相容的(incompatible). 情况会怎么样? 首先不会存在一组完备的A和B的共同本征态，否则$[A,B]=0$. 但是不排除偶然有共同本征态, 比如Y_{00}就是L_x, L_y, L_z的共同本征态，虽然它们彼此不对易.

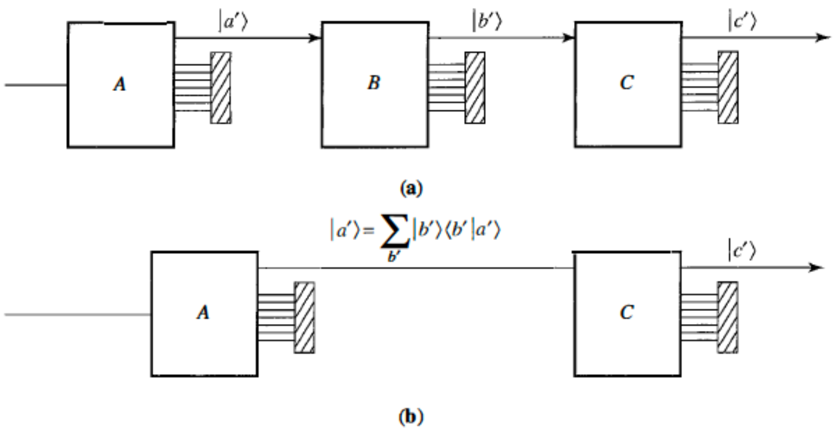

Figure 3.5: 顺序选择测量(Sequential selective measurements)

之前我们研究过Stern-Gerlach实验的不相容物理量的测量效应. 现在我们给出更一般的讨论.

考虑如图Fig.3.5(a) 所示的顺序选择测量. 第一个测量(A)从入射的状态中选择出$|a'\rangle$, 并拒绝掉其他的测量结果. [1] 第二个测量(B)选择出$|b'\rangle$，并拒绝掉其他的测量结果. 最后的测量(C)选择出$|c'\rangle$, 并拒绝其他的结果. 现在我们问得到$|c'\rangle$的几率是多少? 在确定$|a'\rangle$的情况下，得到$|b'\rangle$的概率是$|\langle b'|a'\rangle|^2$. 在确定$|b'\rangle$的情况下，得到$|c'\rangle$的概率是$|\langle c'|b'\rangle|^2$. 根据概率的乘法定理，两个相容时间同时实现的概率是

$$|\langle c'|b'\rangle|^2|\langle b'|a'\rangle|^2 \tag{3.299}$$

那么不论中间过程（或路径)怎样，由$|a'\rangle$得到$|c'\rangle$的几率多大呢? 这意味着我们记录中间路径为b'的概率，然后记录中间路径为下一个b'的几率，如此下去，我们把这些几率求和，得到

$$\sum_{b'} |\langle c'|b'\rangle|^2|\langle b'|a'\rangle|^2 = \sum_{b'} \langle c'|b'\rangle|\langle b'|a'\rangle\langle a'|b'\rangle|\langle b'|c'\rangle \tag{3.300}$$

这是符合概率理论的.

现在我们来对比另一种设置,Fig. 3.5(b), 问由$|a'\rangle$出发得到$|c'\rangle$的几率多大? 显然这个几率是$|\langle c'|a'\rangle|^2$. 我们可以把这个概率改写一下，发现

$$|\langle c'|a'\rangle|^2 = |\sum_{b'} \langle c'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle|^2 = \sum_{b'}\sum_{b''} \langle c'|b'\rangle|\langle b'|a'\rangle\langle a'|b''\rangle|\langle b''|c'\rangle \tag{3.301}$$

[1]为简单起见，我们假设A的本征值没有简并，B和C也一样. 对于简并的情况，只要把$|a'\rangle$理解为由入射状态确定的本征态，$|b'\rangle$, $|c'\rangle$类似.

我们看到Eq.(3.300)和Eq.(3.301)是不同的，后者比前者多很多项!

注意，A选择测量后得到的$a'\rangle$可认为是有B的本征态叠加而成

$$|a'\rangle = \sum_{b'} |b'\rangle\langle b'|a'\rangle \tag{3.302}$$

然而从C测量出来的结果却依赖于对B的测量是否**真的**进行! 如果真的测量B，那么结果是Eq.(3.300);如果只在头脑里想象把$|a'\rangle$分解成$|b'\rangle$的叠加，那最后的结果是Eq.(3.301). 换句话说，如果你真的记录粒子经过b'路径的几率，即使最后对这个几率求和，也会改变最终的几率. 这是量子力学的精髓所在。

在什么情况下，两种情形的结果一致? 容易看到，测值没有简并的条件下，如果$[A,B]=0$，或者$[B,C]=0$, 两个公式给出的结果是一致的。

上面的实验说明的是不相容物理量的特性.

如果A,B不相容, 能否同时测准? 结论是**一般不能同时测准**. 它们的不确定度满足如下关系:

$$\Delta A\cdot\Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle| \tag{3.303}$$

其中不确定度为$\Delta A = \langle(A-\langle A\rangle)^2\rangle^{1/2}$, 是在粒子的运动状态(波函数)下计算的.

证明:

设$|\alpha\rangle$是任意一个态矢量. $(A+i\xi B)|\alpha\rangle$是一个右矢，与其对偶的左矢为$\langle\alpha|(A+i\xi B)^\dagger = \langle\alpha|(A-i\xi B)$. 这里利用了$A,B$是厄密算符. 由于一个右矢与对偶左矢的内积非负，所以可以定义

$$f(\xi) = \langle\alpha|(A-i\xi B)\cdot(A+i\xi B)|\alpha\rangle \geq 0 \tag{3.304}$$

其实就是

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \langle\alpha|(A^2+i\xi(AB-BA)+B^2\xi^2)|\alpha\rangle \\ &= \langle A^2\rangle + (i\langle[A,B]\rangle)\xi + \langle B^2\rangle\xi^2 \end{aligned} \tag{3.305}$$

可以看到$\langle[A,B]\rangle$必为纯虚数, 否则$i\langle[A,B]\rangle$ 不是实数, $f(\xi)$也就不是实数了. (这是由于$i[A,B]$ 是厄密算符. 参见之前作业题.)

根据$a\xi^2+b\xi+c\geq 0$成立的条件: $4ac\geq b^2$, 我们有

$$4\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle \geq (i\langle[A,B]\rangle)^2 \tag{3.306}$$

如果从一开始就以$A-\langle A\rangle$代替A, $B-\langle B\rangle$代替B, 我们有

$$4\langle(A-\langle A\rangle)^2\rangle\langle(B-\langle B\rangle)^2\rangle \geq (i\langle[\hat{A}-\langle A\rangle,\hat{B}-\langle B\rangle]\rangle)^2 \tag{3.307}$$

也就是

$$\Delta A\cdot\Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle| \tag{3.308}$$

具体地, 比如$\hat{A}=x, \hat{B}=\hat{p}_x$, 上式就是我们熟悉的

$$\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{1}{2}|\langle[x,\hat{p}_x]\rangle| = \frac{\hbar}{2}. \tag{3.309}$$

一个简单的例子：如果系统处于Y_{lm}的本征态。我们知道

$$\Delta L_x = \Delta L_y = \sqrt{(l(l+1)-m^2)\hbar^2/2}.$$

并且$\langle L_z\rangle = m\hbar$. 由于$|m|\leq l$, 显然满足上述关系。

考虑原子中的电子. 其活动范围有限, x的量级为10^{-10}米. 其动能的一个分量大约$\langle p_x^2/2m\rangle \simeq 10eV/3$. 考虑到电子处于束缚态, 我们知道$\langle p_x\rangle = 0$, 所以$\Delta p_x \simeq 2\times10^3 eV/c$. (电子质量为$0.5\times10^6 eV/c^2$) 假设位置的不确定度就是$x$的量级, 根据$\Delta x\Delta p \simeq 10^{-15}eVs \simeq \hbar$. 满足测不准关系.

相反, 如果电子在宏观尺度上运动, 比如在厘米大小的盒子内运动. 假设我们可以在微米尺度上确定他的位置,即$\Delta x = 10^{-6}m$, 根据测不准关系, 动量的最高精度是$7\times10^{-10}eVs/m$. 而动能为$1eV$的电子的动量大小为$3\times10^{-5}eVs/m$, 可以看到动量的相对精度很好.

3.13 力学量的时间演化, Schrödinger 与Heisenberg 绘景

3.13.1 力学量的时间演化

系统状态随时间演化, 遵从Schrödinger 方程:

$$i\hbar\frac{\partial|\alpha(t)\rangle}{\partial t}=H|\alpha(t)\rangle \tag{3.310}$$

如果初态是能量本征态$|n\rangle$,

$$H|n\rangle=E_n|n\rangle \tag{3.311}$$

那么系统的演化态是'定态':

$$|\alpha(t)\rangle=\exp(-iE_nt/\hbar)|n\rangle. \tag{3.312}$$

对于定态，力学量A的期望值

$$\langle A\rangle=\langle\alpha|A|\alpha\rangle=\langle n|e^{\mathrm{i}E_nt/\hbar}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_nt/\hbar}|n\rangle=\langle n|A|n\rangle \tag{3.313}$$

不随时间变化。

一般的情况, 如果初态为

$$|\alpha\rangle=\sum_n c_n|n\rangle \tag{3.314}$$

那么t时刻

$$|\alpha(t)\rangle=\sum_n c_n\mathrm{e}^{-iE_nt/\hbar}|n\rangle \tag{3.315}$$

A的期望值

$$\langle A\rangle=\langle\alpha(t)|A|\alpha(t)\rangle \tag{3.316}$$

怎么随时间变化?

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt}=(\frac{\partial}{\partial t}\langle\alpha|)A|\alpha\rangle+\langle\alpha|A\frac{\partial}{\partial t}|\alpha\rangle \tag{3.317}$$

这里我们假设A算符本身不随时间变。根据薛定谔方程

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt}=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\langle[A,H]\rangle. \tag{3.318}$$

我们看到, $\langle A\rangle$是否随时间变化取决于A与H是否对易. 对易就意味着A的期望值不随时间变换，是守恒量。

从另一个角度看，$[A,H]=0$，则A与H有共同本征态，并可以选为基矢。设该基矢为$|E,a\rangle$.

$$H|E,a\rangle=E|E,a\rangle,\qquad A|E,a\rangle=a|E,a\rangle. \tag{3.319}$$

任意态的时间演化可以写为:

$$|\alpha(t)\rangle=\sum_{E,a}c_{E,a}(t)|E,a\rangle\rangle=\sum_{E,a}c_{E,a}(0)e^{-iEt/\hbar}|E,a\rangle \tag{3.320}$$

让我们简写(E,a)为k.

$$\frac{d}{dt}|c_k(t)|^2=\dot{c_k^*}c_k+c_k^*\dot{c_k} \tag{3.321}$$

c_k是能量表象里的分量, 所以$\dot{c}_k=\frac{E}{\mathrm{i}\hbar}c_k$, $\dot{c}_k^*=-\frac{E}{\mathrm{i}\hbar}c_k$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|c_k(t)|^2=0 \tag{3.322}$$

我们知道，$|c_k|^2$是测量H为E, 同时测量A为a的几率, 这就是说$\langle A\rangle$守恒, 并且A 的各个测量值出现的几率也守恒。

例：粒子在半径为R的球面上运动。$H=\frac{L^2}{2\mu R^2}$. 力学量完全集选为(H,L_z), 共同本征函数Y_{lm}.

假设初态

$$\psi(\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{10}+\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{21} \tag{3.323}$$

则

$$\psi(\theta,\phi;t)=\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{10}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_1t/\hbar}+\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{21}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_2t/\hbar} \tag{3.324}$$

其中$E_1=\frac{2\hbar^2}{2\mu R^2}, E_2=\frac{6\hbar^2}{2\mu R^2}$.

由于$[H,L_z]=0$, 所以L_z是守恒量。

$$\langle L_z\rangle=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times\hbar=\frac{1}{2}\hbar \tag{3.325}$$

并且，取0和$\hbar$的几率不变。

如果初态是

$$\psi(\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{10}+\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{11} \tag{3.326}$$

则

$$\psi(\theta,\phi;t)=(\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{10}+\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{21})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_1t/\hbar} \tag{3.327}$$

$\langle L_z\rangle=\frac{1}{2}\hbar$, 测$L_z$得0, $\hbar$的几率还是$\frac{1}{2},\frac{1}{2}$. 注意:

1. L_z守恒，并不是说L_z的测量值唯一。

2. 各守恒量不一定同时有确定值。与H 对易的物理量之间不一定对易。例如对于定态：$\psi(\theta,\phi;t)=Y_{11}\mathrm{e}^{-iE_1t/\hbar}$，$L_z$有唯一确定且不变的测值$\hbar$. 但是$\langle L_x\rangle=0,\langle L_x^2\rangle=\hbar^2/2$, 是有不确定度的。(具体见习题). 容易算出，$L_x$的测值为$-\hbar,0,\hbar$的几率分别为0.25, 0.5, 0.25. 不随时间变化。

3. 存在互不对易的守恒量时，一般能级简并。

   证明: 设$[H,F]=[H,G]=0$, 但是$[F,G]\neq 0$.

   $$H|E,f\rangle=E|E,f\rangle;\qquad F|E,f\rangle=f|E,f\rangle \tag{3.328}$$

   由于$[H,G]=0$,

   $$HG|E,f\rangle=GH|E,f\rangle=EG|E,f\rangle \tag{3.329}$$

   所以$G|E,f\rangle$也是H的本征矢。属于本征值E.

   又$[G,F]\neq 0$,

   $$FG|E,f\rangle\neq GF|E,f\rangle=fG|E,f\rangle \tag{3.330}$$

   即$G|E,f\rangle$不是F的本征矢。也就是说，$G|E,f\rangle$与$|E,f\rangle$不同, 能级是简并的。

   可能存在的例外是: $[G,F]\neq 0$, 但是如果$G|E,f\rangle=0$, 那么

   $$FG|E,f\rangle=0;\quad GF|E,f\rangle=fG|E,f\rangle=0 \tag{3.331}$$

   此时$G|E,f\rangle$还是F的本征矢，因此不能证明$G|E,f\rangle$与$|E,f\rangle$是不同的量子态。这是氢原子能级基态的情况.