3.14 升降算符法

3.14.1 求解一维谐振子问题

之前我们在坐标表象求解了一维谐振子的定态方程（微分方程）

$$H\psi_n(x) = E_n\psi_n(x) \tag{3.355}$$

现在我们介绍代数方法。

引入

$$\begin{aligned} Q &= \alpha x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \\ P &= \frac{p}{\hbar\alpha} = \frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}} \end{aligned} \tag{3.356}$$

P与Q满足

$$[Q, P] = \mathrm{i}, \tag{3.357}$$

这里利用了$1/\alpha$是特征长度，$\hbar\alpha$是特征动量。并且

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(P^2 + Q^2) \tag{3.358}$$

定义$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + \mathrm{i}P), a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - \mathrm{i}P)$. 注意$a \neq a^\dagger$, 不是厄密的。

容易得到

$$[a, a^\dagger] = 1, \tag{3.359}$$

以及

$$a^\dagger a = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2 - 1). \tag{3.360}$$

于是

$$H = (a^\dagger a + \frac{1}{2})\hbar\omega. \tag{3.361}$$

假设我们不知道H的本征值是$(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$, 也不知道$H$的本征态是$\psi_n = N_n \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} H_n(\alpha x)$. 我们来求解

$$H|n\rangle = \lambda_n|n\rangle \tag{3.362}$$

这里λ_n和$|n\rangle$都是未知的。由于

$$[a, H] = [a, a^\dagger a]\hbar\omega = a\hbar\omega, \tag{3.363}$$

我们有

$$Ha|n\rangle = (aH - \hbar\omega a)|n\rangle = (\lambda_n - \hbar\omega)a|n\rangle \tag{3.364}$$

即$a|n\rangle$也是H的本征态，属于本征值$\lambda_n - \hbar\omega$. 同理，$\lambda_n - 2\hbar\omega, \lambda_n - 3\hbar\omega, \cdots$,都是本征值，对应本征态是$a^2|n\rangle, a^3|n\rangle, \cdots$.

由于

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \langle\psi|a^\dagger a|\psi\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega \geq 0 \tag{3.365}$$

所以**本征值一定有个最小值λ_0，对应的本征态$|0\rangle$满足$a|0\rangle = 0$.**

$$H|0\rangle = \hbar\omega a^\dagger a|0\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle. \tag{3.366}$$

因此$\lambda_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. 所有的能级也确定了：$\lambda_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$. 其中$n = 0, 1, 2, \cdots$.

会不会存在另外一个本征值λ'_n, 对应本征态$|n'\rangle$. 由此出发得到一系列本征态$a|n'\rangle, a^2|n'\rangle, \cdots$, 对应一系列本征值$\lambda'_n, \lambda'_n - \hbar\omega, \cdots$？ 从而得到另外一套本征谱？答案是否定的。因为如果有，那么这一套本征值

也有个最小值λ_0', 对应$|0'\rangle$, 必须满足$a|0'\rangle = 0$. 因此可以算出$H|0'\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0'\rangle$. 谐振子问题没有简并，所以$|0\rangle$与$|0'\rangle$是一个态。所以'两套'能谱是一样的.

利用$[a^\dagger, H] = -a^\dagger\hbar\omega$, 可以推出$a^\dagger|n\rangle$是H的本征态，本征值为$\lambda_n + \hbar\omega$.

会不会存在一个最大的n_max, 使得$a^\dagger|n_{max}\rangle$等于零? 不会，我们反证之. 假设对于某个$|n_{max}\rangle$, $a^\dagger|n_{max}\rangle = 0$。由于

$$H = (aa^\dagger - \frac{1}{2})\hbar\omega \tag{3.367}$$

所以

$$H|n_{max}\rangle = \hbar\omega aa^\dagger|n_{max}\rangle - \hbar\omega|n_{max}\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\omega|n_{max}\rangle \tag{3.368}$$

违背了(3.365): 任意状态的能量期望值大于等于零. 因此$n = 0, 1, 2, \cdots$, 没有上限。

注意到

$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle \tag{3.369}$$

所以$a^\dagger a$是量子数算符。

$a|n\rangle$是能量本征态，且根据Eq.(3.364), $a|n\rangle$等价于$|n-1\rangle$(考虑到一维束缚态没有简并.) 但是并不一定是归一化的本征态。我们设

$$a|n\rangle = c(n)|n-1\rangle, \tag{3.370}$$

那么

$$\langle n|a^\dagger = c^*(n)\langle n-1|. \tag{3.371}$$

同样，$a^\dagger|n\rangle = d(n)|n+1\rangle$, 所以$\langle n|a = d^*(n)\langle n+1|$. 计算

$$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = |c(n)|^2 = n \tag{3.372}$$

$$\langle n|aa^\dagger|n\rangle = |d(n)|^2 = n+1 \tag{3.373}$$

我们得到

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{3.374}$$

或者

$$a^\dagger|n-1\rangle = \sqrt{n}|n\rangle \tag{3.375}$$

因此, 任意能量本征态$|n\rangle$可以认为是由基态生成出来的

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle \tag{3.376}$$

坐标表象下的波函数非常有用。我们怎么求波函数呢? 我们可以利用$a|0\rangle = 0$来确定基态波函数。根据a的定义，我们知道在坐标表象下

$$(\frac{i}{\hbar\alpha}(\frac{-i\hbar\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}) + \alpha x)\psi_0(x) = 0 \tag{3.377}$$

即

$$(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \alpha^2 x)\psi_0(x) = 0 \tag{3.378}$$

得

$$\psi_0(x) = N_0\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}} \tag{3.379}$$

归一化，可以定出N_0.

再利用$a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$,

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha x - \frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})\psi_0(x) = N_1\alpha x\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}} \tag{3.380}$$

普遍地，

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger \psi_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}} (\xi - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}) \psi_{n-1} \tag{3.381}$$

这里$a^\dagger$是作用到波函数上的有效算符，其中

$$\xi = \alpha x \tag{3.382}$$

依次类推

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{N_0}{2^n n!}} (\xi - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi})^n \mathrm{e}^{-\xi^2/2} \equiv N_n H_n(\xi) \mathrm{e}^{-\xi^2/2} \tag{3.383}$$

下降算符a的本征态非常重要，称作**相干态**(coherent state):

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{3.384}$$

其中本征值习惯上写为α，由于a不是厄米算符，所以α为一个复数(注意不是前面的$\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$). 设

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\alpha)|n\rangle \tag{3.385}$$

所以

$$a|\alpha\rangle = \sum_n C_n(\alpha)\sqrt{n}|n-1\rangle = \alpha \sum_n C_n(\alpha)|n\rangle \tag{3.386}$$

比较求和中$|n-1\rangle$项系数，

$$C_n(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} C_{n-1}(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0(\alpha) \tag{3.387}$$

考虑归一化

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |C_0|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^2}{n!} = 1 \tag{3.388}$$

其中求和为$\mathrm{e}^{|\alpha|^2}$, 所以

$$C_0 = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \tag{3.389}$$

$$|\alpha\rangle = C_0(\alpha) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{3.390}$$

粒子处于$|n\rangle$的几率

$$|C_n|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} \tag{3.391}$$

为泊松分布. 容易算出$\langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = |\alpha|^2$, $a^\dagger + a$的标准偏差为$|\alpha|$。

如果零时刻粒子处于$|\alpha\rangle$, 那么t时刻就是

$$|t\rangle = C_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n t} \tag{3.392}$$

$$\langle x(t)\rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}} \langle (a + a^\dagger)\rangle = \sqrt{2}|\alpha| x_0 \cos(\omega t + \phi) \tag{3.393}$$

(ϕ 是初相，由α决定, $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$是谐振子特征长度). 标准偏差多大？为什么说相干态最接近经典状态？对于相干态，测不准关系是？

矩阵表示

我们来计算能量表象下各算符的矩阵形式

根据Eq(3.374),

$$a_{n-1,n} = \langle n-1|a|n\rangle = \sqrt{n} \tag{3.394}$$

$$a^\dagger_{n+1,n} = \langle n+1|a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1} \tag{3.395}$$

即矩阵元为$a_{n,m} = \sqrt{m}\delta_{n+1,m}, a^\dagger_{n,m} = \sqrt{m+1}\delta_{n-1,m}$. 注意，$n, m = 0, 1, 2, \cdots$.

利用

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger P = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a) \tag{3.396}$$

容易得到

$$Q_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{m}\delta_{n+1,m} + \sqrt{m+1}\delta_{n-1,m}) \tag{3.397}$$

$$P_{n,m} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\sqrt{m+1}\delta_{n-1,m} - \sqrt{m}\delta_{n+1,m}) \tag{3.398}$$

$x_{n,m}, p_{n,m}$也就得到了。

3.14.2 角动量

在研究轨道角动量的时候，我们知道L^2, L_z对易，其共同本征态为$|l,m\rangle$.

$$L^2|l,m\rangle = l(l+1)\hbar^2|l,m\rangle; \quad L_z|l,m\rangle = m\hbar|l,m\rangle \tag{3.399}$$

在坐标表象下，就是

$$L^2 Y_{lm} = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}; \quad L_z Y_{lm} = m\hbar Y_{lm} \tag{3.400}$$

我们可以用代数方法得到任意角动量$\mathbf{J}$的类似结果，包括自旋角动量，以及轨道角动量和自旋角动量的矢量和对应的总角动量. 其关键是任意角动量都满足角动量对易关系！

$$[J_x, J_y] = \mathrm{i}\hbar J_z. \tag{3.401}$$

容易推导出

$$[J_\alpha, J^2] = 0, \qquad \alpha = x, y, z \tag{3.402}$$

那么就可以假设J_z, J^2的共同本征态为$|\beta, m\rangle$. 这里对β和m不作任何限制，除了知道其为实数外.

$$J^2|\beta,m\rangle = \beta\hbar^2|\beta,m\rangle \tag{3.403}$$

$$J_z|\beta,m\rangle = m\hbar|\beta,m\rangle \tag{3.404}$$

在$|\beta,m\rangle$下计算J^2得$\beta\hbar^2$, 应该大于$\langle J_z^2\rangle = m^2\hbar^2$, 所以$\beta \geq m^2$. 我们定义

$$J_+ = J_x + \mathrm{i}J_y, \qquad J_- = J_x - \mathrm{i}J_y \tag{3.405}$$

容易知道

$$[J_+, J^2] = 0, \qquad [J_-, J^2] = 0 \tag{3.406}$$

而且

$$[J_z, J_+] = \hbar J_+, \qquad [J_z, J_-] = -\hbar J_- \tag{3.407}$$

这类似于$[a, H] = a\hbar\omega, [a^\dagger, H] = -a^\dagger\hbar\omega$. 此外还有

$$J_+J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z, \qquad J_-J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z \tag{3.408}$$

这类似于$a^\dagger a + \frac{1}{2} = H/\hbar\omega$. 或者$aa^\dagger - \frac{1}{2} = H/\hbar\omega$.

我们有

$$J^2 J_+|\beta,m\rangle = J_+ J^2|\beta,m\rangle = \beta\hbar^2 J_+|\beta,m\rangle \tag{3.409}$$

在考虑Eq.(3.407)

$$J_z J_+|\beta,m\rangle = J_+(J_z+\hbar)|\beta,m\rangle = (m+1)\hbar J_+|\beta,m\rangle \tag{3.410}$$

这表明$J_+|\beta,m\rangle$是J^2, J_z的共同本征态，对应本征值为$\beta\hbar^2$和$(m+1)\hbar$. 所以

$$J_+|\beta,m\rangle = \hbar a_{\beta m}|\beta,m+1\rangle \tag{3.411}$$

$a_{\beta m}$是个归一化常数。类似地，

$$J_-|\beta,m\rangle = \hbar b_{\beta m}|\beta,m-1\rangle \tag{3.412}$$

$b_{\beta m}$是常数。重复上面的过程，由于$\beta \geq m^2$, 所以必然存在一个m的上限$\overline{m}$, 和下限$\underline{m}$

$$J_+|\beta,\overline{m}\rangle = 0, \qquad J_-|\beta,\underline{m}\rangle = 0 \tag{3.413}$$

利用(3.408)

$$J_-J_+|\beta\overline{m}\rangle = (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z)|\beta\overline{m}\rangle = (\beta - \overline{m}^2 - \overline{m})\hbar^2|\beta, \overline{m}\rangle \tag{3.414}$$

因此

$$\beta = \overline{m}(\overline{m}+1) \tag{3.415}$$

类似地，

$$\beta = -\underline{m}(-\underline{m}+1) \tag{3.416}$$

所以$\overline{m} = -\underline{m}$. 我们记$j \equiv \overline{m}$, 有

$$\beta = j(j+1), \tag{3.417}$$

在正负j之间，所有可能的m为

$$m = -j, -j+1, \cdots, j-1, j \tag{3.418}$$

但是注意j**本身并不一定是整数**。而$\overline{m} - \underline{m} = 2j$必须是正整数或零，否则从$\underline{m}$出发，无法加到$\overline{m} = -\underline{m}$. 所以可能的$j$为

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots \tag{3.419}$$

具体j应该取什么值，要看物理问题。比如电子自旋角动量，$j = \frac{1}{2}$。基本粒子的j都是一个特定的永不改变的，称为自旋。π介子自旋为零，电子$1/2$, 光子1, Δ粒子$3/2$, 引力子2; 轨道角动量$j = 0, 1, 2, \cdots$.

我们前面讨论过电子的自旋. $|+, S_z\rangle$其实就是$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$; $|-, S_z\rangle$其实就是$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. $j = \frac{1}{2}$，对应S^2的本征值为$\frac{3}{4}\hbar = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\hbar$. $m = \pm\frac{1}{2}$, 对应S_z的本征值为$\pm\frac{1}{2}\hbar$.

现在我们来确定a_{jm}, b_{jm}.

$$\langle jm|J_-J_+|jm\rangle = \hbar^2|a_{jm}|^2 \tag{3.420}$$

利用(3.408),

$$\hbar^2|a_{jm}|^2 = (j(j+1) - m^2 - m)\hbar^2 \tag{3.421}$$

所以

$$a_{jm} = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} = \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \tag{3.422}$$

类似地

$$b_{jm} = \sqrt{j(j+1) - m^2 + m} = \sqrt{(j-m+1)(j+m)} \tag{3.423}$$

即

$$J_+|jm\rangle = \hbar\sqrt{(j+m+1)(j-m)}|j, m+1\rangle \tag{3.424}$$

$$J_-|jm\rangle = \hbar\sqrt{(j-m+1)(j+m)}|j, m-1\rangle, \tag{3.425}$$

可以看到$J_+|j, j\rangle = 0$, $J_-|j, -j\rangle = 0$.