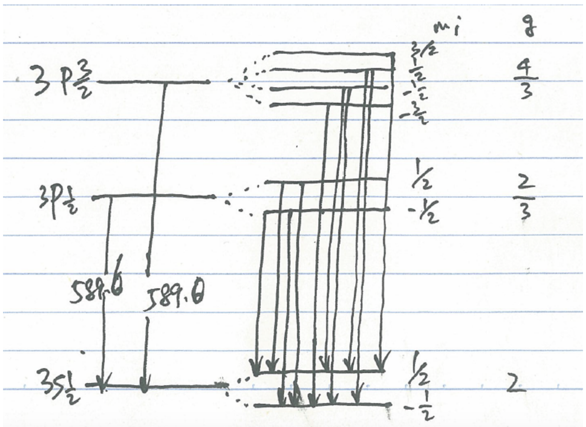

Figure 6.5: 弱场Zeeman效应.

6.4 超精细结构, 自旋单态与三重态

我们来考虑氢原子，其电子和质子都是自旋$\frac{1}{2}$粒子. 质子的磁矩

$$\vec{\mu_p} = \frac{g_p e}{2m_p c}\vec{S_p}$$

其中$g_p = 5.59$，大于电子的$g = 2$.

质子与电子除了库仑相互作用外，还有正比于$\vec{S_p} \cdot \vec{S_e}$ 的磁相互作用, 称为自旋-自旋耦合.

我们现在考虑自旋-自旋耦合对氢原子能级的修正. 显然总角动量的平方和其z分量应该是守恒的好力学量.

我们把问题推广到任意两个自旋1/2粒子. 首先定义其总角动量和它的三个分量

$$\vec{S} \equiv \vec{S}_1 + \vec{S}_2, \tag{6.74}$$

$$S_z = S_z^{(1)} + S_z^{(2)}, \quad S_x = S_x^{(1)} + S_x^{(2)}, \quad S_y = S_y^{(1)} + S_y^{(2)}. \tag{6.75}$$

易证

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_\alpha, S^2] = 0. \quad \alpha = x, y, z \tag{6.76}$$

这样

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{S^2 - S_1^2 - S_2^2}{2} = \frac{S^2}{2} - \frac{3}{4}\hbar^2$$

即S^2, S_z都与$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$对易.

要描述氢原子里面电子和质子的自旋状态, 简单地看有四种可能$\uparrow_e\uparrow_p, \uparrow_e\downarrow_p, \downarrow_e\uparrow_p, \downarrow_e\downarrow_p$，以及它们的各种叠加态. 注意这里我们首次面临两个粒子的量子态的问题，处理起来很简单，就是各自描述，再并在一起. 也可以写为$|+\rangle_e|+\rangle_p, |+\rangle_e|-\rangle_p, |-\rangle_e|+\rangle_p, |-\rangle_e|-\rangle_p$.

这种方式其实就是采用基矢$\chi_{m_s}(1)\chi_{m_s'}(2)$, $m_s = \pm 1/2, m_s' = \pm 1/2$, 它们是$S^2(1), S_z(1), S^2(2), S_z(2)$的共同本征态. 也可以写成

$$\alpha(1)\alpha(2), \quad \alpha(1)\beta(2), \quad \beta(1)\alpha(2), \quad \beta(1)\beta(2)$$

$\alpha(1) = \chi_{\frac{1}{2}}(1)$, $\beta(2) = \chi_{-\frac{1}{2}}(2)$; 或者

$$|+\rangle_1|+\rangle_2, \quad |+\rangle_1|-\rangle_2, \quad |-\rangle_1|+\rangle_2, \quad |-\rangle_1|-\rangle_2.$$

用它们作基矢描述系统的自旋状态称为非耦合表象.

我们看到它们也是S_z的本征函数:

$$\begin{aligned}
S_z\chi_{m_s}(1)\chi_{m'_s}(2) &= (S_z(1)+S_z(2))\chi_{m_s}(1)\chi_{m'_s}(2)\\
&= m_s\hbar\chi_{m_s}(1)\chi_{m'_s}(2)+m'_s\hbar\chi_{m_s}(1)\chi_{m'_s}(2)\\
&= (m_s+m'_s)\hbar\chi_{m_s}(1)\chi_{m'_s}(2)
\end{aligned}$$

这里注意: 两个算符各自作用到自己空间的态. 我们得到S_z的本征值有$\hbar, 0, -\hbar$ 三种可能.

我们想知道S^2, S_z的共同本征态与本征值. 它们是:

$$\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2, \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)$$

证明:

$$S_z\alpha_1\alpha_2 = \hbar\alpha_1\alpha_2, \tag{6.77}$$

$$S_z\beta_1\beta_2 = -\hbar\beta_1\beta_2. \tag{6.78}$$

$$S_z\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\hbar}{2}\alpha_1\beta_2-\frac{\hbar}{2}\beta_1\alpha_2)+\frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{\hbar}{2}\alpha_1\beta_2+\frac{\hbar}{2}\beta_1\alpha_2) = 0 \tag{6.79}$$

$$S_z\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2) = 0 \tag{6.80}$$

再看

$$\begin{aligned}
S^2\alpha_1\alpha_2 &= (\frac{3\hbar^2}{2}+2\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2)\alpha_1\alpha_2\\
&= [\frac{3\hbar^2}{2}+\frac{2\hbar^2}{4}(\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}+\sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)}+\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)})]\alpha_1\alpha_2\\
&= \frac{3\hbar^2}{2}\alpha_1\alpha_2+\frac{\hbar^2}{2}[\beta_1\beta_2-\beta_1\beta_2+\alpha_1\alpha_2] = 2\hbar^2\alpha_1\alpha_2
\end{aligned}$$

这里用到$\sigma_x\alpha=\beta, \sigma_y\alpha=i\beta$. 下面还要用到$\sigma_x\beta=\alpha$, $\sigma_y\beta=-i\alpha$.

同理

$$S^2\beta_1\beta_2 = 2\hbar^2\beta_1\beta_2$$

再看第三个态

$$\begin{aligned}
&S^2\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)\\
=\ &\frac{3\hbar^2}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)+\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}[(\beta_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2)\times 2+(-\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)]\\
=\ &2\hbar^2\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)
\end{aligned}$$

和第四个态

$$\begin{aligned}
&S^2\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)\\
=\ &\frac{3\hbar^2}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)+\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}[(\beta_1\alpha_2-\alpha_1\beta_2)+(\beta_1\alpha_2-\alpha_1\beta_2)+(-\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)]\\
=\ &0
\end{aligned}$$

我们引入记号χ_{SM_S}, 其中$S=0$, 或者1,为总自旋量子数；M_S有$2S+1$可能, 为总自旋z分量量子数. 当$S=1$,

$$\chi_{SM_S}=\begin{cases}\alpha_1\alpha_2=\chi_{11}, & S=1,M_S=1\\ \beta_1\beta_2=\chi_{1-1}, & S=1,M_S=-1\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)=\chi_{10}, & S=1,M_S=0\end{cases} \tag{6.81}$$

称为自旋三重态(triplet). 当$S=0$时,

$$\chi_{00}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2) \tag{6.82}$$

或者写为$\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle-|-+\rangle)$, 称为自旋单态($singlet$). 非常重要!

回过头来看氢原子的能级修正. 当电子与质子形成三重态时能量上升, 而形成单态时能量下降. 造成大约$5.88\times10^{-6}eV$的能级劈裂, 这称为超精细结构.

6.4.1 量子测量的$Bell$基

另外一种基矢选择是:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)\to\psi^+,\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)\to\psi^-$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)\to\phi^+,\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)\to\phi^-$$

以上4个基失构成$Bell$基, 他们都是“纠缠态”($entangled$), 它们是$S_z(1)S_z(2)$与$S_x(1)S_x(2)$的共同本征态.

纠缠态不能写成两个自旋态的“直接乘积”. 下面这个态是直接乘积态:

$$\begin{aligned}&(c_1\alpha(1)+c_2\beta(1))(c_1'\alpha(2)+c_2'\beta(2))\\=\;&c_1c_1'\alpha(1)\alpha(2)+c_2c_1'\beta(1)\alpha(2)+c_1c_2'\alpha(1)\beta(2)+c_2c_2'\beta(1)\beta(2)\end{aligned}$$

不论怎么选择c_1,c_2,c_1',c_2'都不能表示$\psi^+,\psi^-,\phi^+,\phi^-$这样的态.

Schrödinger的“猫”:

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_e|\text{活}\rangle_{cat}-|-\rangle_e|\text{死}\rangle_{cat}), \tag{6.83}$$

设想我们观测电子的自旋. 测量后波函数塌缩到电子自旋的本征态$|+\rangle_e|\text{活}\rangle_{cat}$ 或者$|-\rangle_e|\text{死}\rangle_{cat}$, 我们看到: 猫的死活取决于对电子自旋的“观察”或“测量”, 就是典型的纠缠态. 更奇妙的是这种“关联”似乎是‘非定域’的. 我们在后面Bohm的理想实验部分再详细讨论这一点.

6.5 任意两个角动量的耦合，C-G系数

之前我们研究了轨道角动量与自旋角动量的耦合，两个自旋角动量的耦合；我们可以问任意两个角动量$\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$的耦合规律是怎样的?

设$\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2=\mathbf{J}$为总角动量. 容易证明

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \tag{6.84}$$

即总角动量满足角动量对易关系.

非耦合表象基矢为$|j_1 m_1\rangle|j_2 m_2\rangle$. 设$j_1, j_2$为两个角动量的量子数，则Hilbert空间的维度为$(2j_1+1)(2j_2+1)$.

耦合表象的基矢应该是J_1^2, J_2^2, J^2, J_z 的共同本征态，记为$|j_1 j_2 j m_j\rangle$. 满足

$$J_1^2|j_1 j_2 j m_j\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1 j_2 j m_j\rangle \tag{6.85}$$

$$J_2^2|j_1 j_2 j m_j\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2|j_1 j_2 j m_j\rangle \tag{6.86}$$

$$J^2|j_1 j_2 j m_j\rangle = j(j+1)\hbar^2|j_1 j_2 j m_j\rangle \tag{6.87}$$

$$J_z|j_1 j_2 j m_j\rangle = m_j\hbar|j_1 j_2 j m_j\rangle \tag{6.88}$$

现在的问题时将两个表象的基矢的关系找到. 我们假设

$$|j_1 j_2 j m_j\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{j,m_j}_{m_1,m_2}|j_1 m_1\rangle|j_2 m_2\rangle \tag{6.89}$$

由于$J_z = J_z(1)+J_z(2)$,

$$J_z|j_1 j_2 j m_j\rangle = \sum_{m_1, m_2}(m_1+m_2)\hbar C^{j,m_j}_{m_1,m_2}|j_1 m_1\rangle|j_2 m_2\rangle \tag{6.90}$$

如果求和只包含$m_1+m_2=m_j$的项:

$$|j_1 j_2 j m_j\rangle = \sum_{m_1+m_2=m_j} C^{j,m_j}_{m_1,m_2}|j_1 m_1\rangle|j_2 m_2\rangle \tag{6.91}$$

就可以满足$m_j = m_1+m_2$, 并且是J_z的本征态.

此外给定j_1, j_2可以得到的j并不唯一. 比如轨道和自旋角动量耦合时$j=l+1/2$，也可以是$j=l-1/2$.

由于m_1最多为j_1, m_2最多为j_2, 所以m_j最多可以是j_1+j_2, 这说明j最多为

$$j_1+j_2 = j_{max}. \tag{6.92}$$

我们可以通过比较耦合表象与非耦合表象的Hilbert空间维度来找到j的最小取值.

$$\sum_{j=j_{min}}^{j_{max}}(2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1) \tag{6.93}$$

其中

$$\sum_{j=j_{min}}^{j_{max}}(2j+1) = (j_{max}+j_{min}+1)(j_{max}-j_{min}+1). \tag{6.94}$$

我们得到

$$j_{min}^2 = (j_1-j_2)^2 \tag{6.95}$$

所以$j_{min} = |j_1-j_2|$. 这也可以用三角形三边关系形象地表示.

在$|j_1-j_2| \le j \le j_1+j_2$给定的情况下，$m_j$可以取$-j, -j+1, \ldots, j$. 给定$j, m_j$, $C^{j,m_j}_{m_1,m_2}$是确定的，称为C-G系数. 可以理解为两个表象基矢的内积

$$C^{j,m_j}_{m_1,m_2} = \langle j_2, m_2|\langle j_1, m_1|j_1 j_2 j m_j\rangle \tag{6.96}$$

表6.1,6.2给出了两种情况.

Table 6.1: 例1: 自旋和轨道角动量耦合. $j_1 = l, j_2 = 1/2; m_j = m_1 + m_2$.

	$m_2 = 1/2$	$m_2 = -1/2$
$j = j_1 + 1/2, m_j$	$\sqrt{\frac{j_1+m_j+1/2}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\frac{j_1-m_j+1/2}{2j_1+1}}$
$j = j_1 - 1/2, m_j$	$-\sqrt{\frac{j_1-m_j+1/2}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\frac{j_1+m_j+1/2}{2j_1+1}}$

Table 6.2: 例2: 角动量耦合:$j_2 = 1.m_2 = 1, 0, -1.$ $m_1 = m_j - m_2$

	$m_2 = 1$	$m_2 = 0$	$m_2 = -1$
$j = j_1 + 1, m_j$	$\sqrt{\frac{(j_1+m_j)(j_1+m_j+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m_j+1)(j_1+m_j+1)}{(j_1+1)(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m_j)(j_1-m_j+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}}$
$j = j_1, m_j$	-$\sqrt{\frac{(j_1+m_j)(j_1-m_j+1)}{2j_1(j_1+1)}}$	$\frac{m_j}{\sqrt{j_1(j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m_j)(j_1+m_j+1)}{2j_1(j_1+1)}}$
$j = j_1 - 1, m_j$	$\sqrt{\frac{(j_1-m_j)(j_1-m_j+1)}{2j_1(2j_1+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(j_1-m_j)(j_1+m_j)}{j_1(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1+m_j+1)(j_1+m_j)}{2j_1(2j_1+1)}}$

6.6 EPR佯谬与Bell不等式

历史上Einstein等人提出了著名的EPR佯谬，用来质疑量子力学的理论基础. $Bohm$根据他们的理论提出了以下理想实验.

考虑一个中性π^0介子的衰变

$$\pi^0 \to e^- + e^+. \tag{6.97}$$

由于介子自旋为零，所以电子和正电子形成单态，飞向两边（假设电子飞向左边, 记为粒子1; 正电子向右, 记为粒子2）:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2). \tag{6.98}$$

我们利用两个SG装置测量两个电子的自旋z分量.

单独看两边的测量结果

$$\begin{aligned} \langle S_z(1)\rangle &= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{2} + \frac{1}{2}(-\frac{\hbar}{2}) = 0 & (6.99)\\ \langle S_z(2)\rangle &= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{2} + \frac{1}{2}(-\frac{\hbar}{2}) = 0 & (6.100)\end{aligned}$$

更直接地考虑：$|+\rangle_1|-\rangle_2$是$S_z(1)$的本征态，本征值为$\hbar/2$; $|-\rangle_1|+\rangle_2$也是$S_z(1)$的本征态，本征值是$-\hbar/2$; 几率各为1/2. 所以平均仍为0.

但是如果把两边的结果乘起来，就是说读取$S_z(1)S_z(2)$, 并计算其统计平均，也就是量子力学期望值

$$\langle S_z(1)S_z(2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}({}_2\langle -|_1\langle +| -{}_2\langle +|_1\langle -|)S_z(1)S_z(2)\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2) = -\frac{\hbar^2}{4} \tag{6.101}$$

更直接地考虑：$|+\rangle_1|-\rangle_2$是$S_z(1)S_z(2)$的本征态，本征值为$-\hbar^2/4$; $|-\rangle_1|+\rangle_2$也是$S_z(1)S_z(2)$的本征态，本征值还是$-\hbar^2/4$; 几率各为1/2. 所以平均仍为$-\hbar^2/4$.

虽然$S_z(1), S_z(2)$取$\pm\frac{\hbar}{2}$的几率都是$\frac{1}{2}$, 但是$S_z(1)$取$\frac{\hbar}{2}$，$S_z(2)$一定取$-\frac{\hbar}{2}$，反之亦反.

两个电子之间有关联，这称为**量子关联**!

根据量子力学，容易证明

$$\langle(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{n}_1)(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{n}_2)\rangle = -\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 \tag{6.102}$$

记为$P(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$, 其中$\vec{n}_1$与$\vec{n}_2$为两台SG_1, SG_2的测量测量方向.

进一步，让我们设想：在左边完成了对电子的S_z测量，为向上，那么此之后对右边正电子测量S_z结果就永远为向下. 这是由于波函数应该塌缩$S_z(1)$的本征值为$\hbar/2$的本征态; 由于两个粒子处于(6.98), 所以实际塌缩到

$$|+\rangle_1|-\rangle_2. \tag{6.103}$$

我们可以设置SG_1, SG_2在非常远的地方，保证测量发生在同时（误差$\Delta t\cdot c<\Delta s$, c为光速，Δs为距离). 按相对论语言，两点是"类空"的，应该没有因果关系！可是波函数的塌缩改变了类空距离之外的粒子的状态. 因此，似乎与相对论矛盾. 这就是Einstein, Podolsky, Rosen提出的EPR佯谬, 建立在任何影响的传播速度不能大于光速的基础上. 他们进而认为**量子力学是'不完备'的**. 波函数并不是所有，**为了完全描述系统的状态，需要某个额外的参量λ, 称为隐变量**.

隐变量理论是否正确一直没法验证. 直到1964年，J. Bell证明了隐变量理论要求测量结果必须遵从Bell不等式，而量子力学理论没有这个要求. 这为试验验证提供了基础.

$Bell$建议测量$P(\vec{n}_1,\vec{n}_2)$, 即两个自旋乘积的平均值. 隐变量理论要求结果必须满足

$$|P(\vec{n}_1,\vec{n}_2)-P(\vec{n}_1,\vec{n}_3)|\le 1+P(\vec{n}_2,\vec{n}_3), \tag{6.104}$$

这就是**著名的$Bell$不等式**.

量子理论明显不满足这一不等式: 取$\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3$在一个平面内, $\vec{n}_1,\vec{n}_2$成$\pi/2$, $\vec{n}_3$与它们成$\pi/4$. 于是根据量子力学结果(6.102)

$$P(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=0, \tag{6.105}$$

$$P(\vec{n}_1,\vec{n}_3)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=P(\vec{n}_2,\vec{n}_3) \tag{6.106}$$

$Bell$不等式为$\frac{\sqrt{2}}{2}\le 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 不成立！

6.6.1 $Bell$不等式的证明

隐变量理论认为波函数没有完全描述系统，为了完全描述系统的状态，需要某个额外的参量λ.

假设完全(complete)的态由λ给出, λ在每个π介子衰变时都不一样，我们既不理解也没法控制它. 换言之，两个粒子的态不是确定的(6.98).

进一步，我们假设在测量$\sigma_{\vec{n}}$时，左边电子的测量与右边正电子的角度$\vec{n}'$完全无关. （可以在刚要测量电子之前，由正电子一端实验者设置$\vec{n}'$, 使得没有信息可以传达到电子一端）.

实验结果一定可以写成某种函数

$$A(\vec{n},\lambda)=\pm 1, \tag{6.107}$$

同理，对于右边的试验结果，一定可以写成另一个函数

$$B(\vec{n}',\lambda)=\pm 1 \tag{6.108}$$

注意λ是描述整个状态的. 我们同时知道实验结果要求：对相同方向$\vec{n}_1$, 测量结果A, B反平行，因此对所有的λ, 满足

$$A(\vec{n}_1,\lambda)=-B(\vec{n}_1,\lambda) \tag{6.109}$$

但要点是: **这不是通过波函数塌缩来保证的，而是由之前π介子衰变时的变量λ保证的.**

我们来根据隐变量理论计算测量的平均值

$$P(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\int\rho(\lambda)A(\vec{n}_1,\lambda)B(\vec{n}_2,\lambda)d\lambda, \tag{6.110}$$

其中$\rho(\lambda)$ 是**经典几率密度**: 满足归一化，非负性.

根据Eq. (6.109),

$$P(\vec{n}_1,\vec{n}_2) = -\int \rho(\lambda)A(\vec{n}_1,\lambda)A(\vec{n}_2,\lambda)d\lambda \tag{6.111}$$

注意如果$\vec{n}_1=\vec{n}_2$, 那么上式为-1, 是我们试图利用的实验事实.

现在我们考虑第三个方向$\vec{n}_3$, 它是任意的

$$P(\vec{n}_1,\vec{n}_2) - P(\vec{n}_1,\vec{n}_3) = -\int \rho(\lambda)[A(\vec{n}_1,\lambda)A(\vec{n}_2,\lambda) - A(\vec{n}_1,\lambda)A(\vec{n}_3,\lambda)]d\lambda \tag{6.112}$$

由于$(A(\vec{n},\lambda))^2=1$.（因为测量值为±1）

$$P(\vec{n}_1,\vec{n}_2) - P(\vec{n}_1,\vec{n}_3) = -\int \rho(\lambda)[1 - A(\vec{n}_2,\lambda)A(\vec{n}_3,\lambda)]A(\vec{n}_1,\lambda)A(\vec{n}_2,\lambda)d\lambda$$

由于(6.107),

$$-1 \le A(\vec{n}_1,\lambda)A(\vec{n}_2,\lambda) \le 1, \tag{6.113}$$

$$\rho(\lambda)[1 - A(\vec{n}_2,\lambda)A(\vec{n}_3,\lambda)] \ge 0 \tag{6.114}$$

绝对值小于

$$\begin{aligned}
|P(\vec{n}_1,\vec{n}_2) - P(\vec{n}_1,\vec{n}_3)| &\le \int \rho(\lambda)[1 - A(\vec{n}_2,\lambda)A(\vec{n}_3,\lambda)]d\lambda \\
&= 1 - \int \rho(\lambda)A(\vec{n}_2,\lambda)(-B(\vec{n}_3,\lambda))d\lambda \\
&= 1 + P(\vec{n}_2,\vec{n}_3)
\end{aligned}$$

这就是Bell不等式了.

我们的出发点是(6.110),即两个方向的关联是通过事先存在的隐变量决定的，而不是波函数的塌缩.

目前，已有大量实验附合量子力学预言，违背$Bell$不等式！波函数的瞬间塌缩是解释实验所必需的.

但是波函数的塌缩会不会带来因果性的灾难？实际上一个操作左边电子测量的人，可以根据自己的实验记录知道右边正电子的实验记录；但是却没有任何方法可以利用他的测量对右边正电子测量的人发出一个能够产生后果的信号, 因此并不违背相对论. （请大家参考Griffiths书12.2节.）