• 再考虑时间平移（演化）

$$|\alpha(t)\rangle = U(t, t_0)|\alpha(t_0)\rangle$$

还是考虑无穷小 evolution. $U(t_0+dt, t_0)$

$$\lim_{dt\to 0} U(t_0+dt, t_0) = 1 .$$

$\langle\alpha(t)|\alpha(t)\rangle = \langle\alpha(t_0)|\alpha(t_0)\rangle$

$\Rightarrow U^+(t,t_0)\,U(t,t_0)=1$

幺正性

应该有. $U(t_0+dt, t_0) = 1 - i\Omega\, dt$. ← dt 的线性主格

其中 $\Omega^+ = \Omega$ 厄密.

自动满足群的 2 条要求.

1. $U(t_0+dt_1+dt_2, t_0) = U(t_0+dt_1+dt_2, t_0+dt_1)\,U(t_0+dt_1, t_0)$
2. $U^+(t_0+dt, t_0)\,U(t_0+dt, t_0) = (1+i\Omega^+dt)(1-i\Omega dt)=1$.

量纲. $[\Omega] = \frac{1}{t}$. $\Rightarrow$ $\boxed{\Omega = \frac{H}{\hbar}}$ $\left(e^{-\frac{iH}{\hbar}t} = 1-\frac{iH}{\hbar}t\right)$.

承认这一点可以导出 Schrödinger Eq!

$$U(t+dt, t_0) = U(t+dt, t)\,U(t,t_0) = \left(1-\frac{iH}{\hbar}dt\right)U(t,t_0)$$

$$U(t+dt, t_0) - U(t,t_0) = -i\frac{H}{\hbar}dt\;U(t,t_0)$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H\,U(t,t_0)} \to \text{Seq for } U(t,t_0)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)|\alpha(t_0)\rangle = H\,U(t,t_0)|\alpha(t_0)\rangle$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha(t)\rangle = H|\alpha(t)\rangle} \to \text{Seq}$$

进一步. $U(t,t_0) = e^{-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}}$ 　H 为时间演化生成元.

• 若 $H(t)$. $U(t,t_0) = e\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t'} dt'\, H(t')\right]$

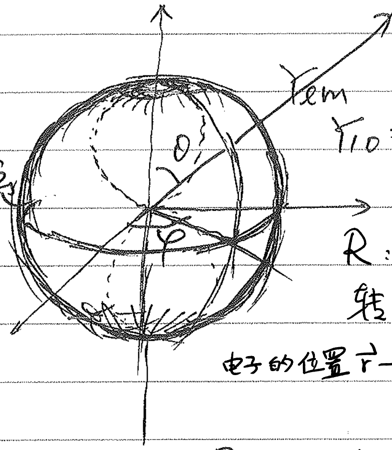
6

• 回到 角动量

在三维空间旋转一个系统，态矢应该会变。例如球面上的自由电子

设 R 是 3×3 正交矩阵，它转动 $\vec{V}$，对应 $\mathcal{D}(R)$ 转动 $|\alpha\rangle$。

$$|\alpha\rangle_R = \mathcal{D}(R)|\alpha\rangle.$$



Y_{lm} $\quad l=1, m=0$

$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$

R：绕 $\vec{n}(\theta,\varphi)$ 转动球

电子的位置 $\vec{r}\to\vec{r}' = R_n\vec{r}$

$\mathcal{D}(R)$ 的维数 $N=$? 取决于物理系统

比如 自旋 $\frac{1}{2}$ 系统，$N=2$.

$\mathcal{D}(R)$ 是 2×2 矩阵.

从无穷小旋转 走起，类似之前 $T_\varepsilon = 1 - i\frac{P}{\hbar}\varepsilon$，$U_\varepsilon = 1-\frac{iH}{\hbar}\varepsilon$.

$\boxed{\text{角动量是旋转操作的生成元!}}$

定义 J_k 为绕 k 轴无穷小转动的生成元：$\frac{J_k}{\hbar}$

绕 k 转动幺正 $\Rightarrow J_k = J_k^{\dagger}$

Hilbert空间的转动：$\mathcal{D}(\hat{n}, d\phi) = 1 - i\frac{\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}d\phi$ $\overset{\text{对应}}{\longleftrightarrow}$ 在实空间 绕 $\hat{n}$ 转 $d\phi$.

有限转动 $$\mathcal{D}_z(\phi) = \lim_{N\to\infty}\left[1 - i\left(\frac{J_z}{\hbar}\right)\frac{\phi}{N}\right]^N = e^{-\frac{iJ_z\phi}{\hbar}}$$

进一步 假设 $\mathcal{D}(R)$ 与 R 有一样的“群”性质.

① Identity（单位元） $R\cdot1 = R \Rightarrow \mathcal{D}(R)\cdot\mathbb{1} = \mathcal{D}(R)$

② closure（封闭性） $R_1R_2 = R_3 \Rightarrow \mathcal{D}(R_1)\mathcal{D}(R_2) = \mathcal{D}(R_3)$

③ Inverses:（逆元） $RR^{-1} = 1 \Rightarrow \mathcal{D}(R)\mathcal{D}^{-1}(R) = \mathbb{1}$.

④ Associativity（结合性） $R_1(R_2R_3) = (R_1R_2)R_3 \Rightarrow \mathcal{D}(R_1)[\mathcal{D}(R_2)\mathcal{D}(R_3)] = [\mathcal{D}(R_1)\mathcal{D}(R_2)]\mathcal{D}(R_3)$

$$[R_x(\varepsilon), R_y(\varepsilon)] = R_z(\varepsilon^2) - 1$$

$$\Rightarrow \left[\left(1 - \frac{iJ_x\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right), \left(1 - \frac{iJ_y\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}\right)\right] = 1 - \frac{iJ_z\varepsilon^2}{\hbar} - 1$$

ε 一阶项抵消.（对易）

ε^2 项给出. $\dfrac{(i)^2 J_x J_y \varepsilon^2}{\hbar^2} - \dfrac{(i)^2 J_y J_x \varepsilon^2}{\hbar^2} = \dfrac{i J_z \varepsilon^2}{\hbar}$

$$\boxed{[J_x, J_y] = i\hbar J_z}$$

进一步. $[J_i, J_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k$.

一般: 无穷小变换生成元不对易, 对应的~~的~~变换群是非阿贝尔的. (Non-Abelian).

- 就是说 3维转动群是非阿贝尔的.
- 但三维空间的平移群是阿贝尔的. $[P_i, P_j] = 0$.

以上对易关系的推导, 我用了:

a. J_k 是绕 k 轴转动的生成元

b. 绕不同轴的转动不对易.

· 自旋$\frac{1}{2}$系统

满足 $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$ 的最小维度 $N=2$.

在之前课程中,

我们知道: $S_x = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)$ (利用对易关系得到).

$$S_y = \frac{i\hbar}{2}(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)$$

考虑绕z轴转动有限的角度ϕ.

$$|\alpha\rangle_R = \mathcal{D}_z(\phi)|\alpha\rangle, \quad \mathcal{D}_z(\phi) = e^{-\frac{iS_z\phi}{\hbar}}$$

计算 $\langle S_x\rangle \longrightarrow {}_R\langle\alpha|S_x|\alpha\rangle_R = \langle\alpha|\mathcal{D}_z^\dagger(\phi) S_x \mathcal{D}_z(\phi)|\alpha\rangle$,

$$= \langle S_x\rangle\cos\phi - \langle S_y\rangle\sin\phi$$

$$\langle S_y\rangle \longrightarrow \langle S_y\rangle\cos\phi + \langle S_x\rangle\sin\phi$$

$$\langle S_z\rangle \longrightarrow \langle S_z\rangle$$

在实空间期望值绕z轴转动ϕ.

$$\begin{pmatrix}\langle S_x\rangle_R\\ \langle S_y\rangle_R\\ \langle S_z\rangle_R\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle S_x\rangle\\ \langle S_y\rangle\\ \langle S_z\rangle\end{pmatrix}.$$

General: $\boxed{\langle J_k\rangle_R = \sum_l R_{kl}\langle J_l\rangle}$

推导: $e^{\frac{iS_z\phi}{\hbar}} S_x e^{-\frac{iS_z\phi}{\hbar}} = \frac{\hbar}{2} e^{\frac{iS_z\phi}{\hbar}}(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)e^{-\frac{iS_z\phi}{\hbar}}$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(e^{\frac{i\phi}{2}}|+\rangle\langle-|e^{+\frac{i\phi}{2}} + e^{-\frac{i\phi}{2}}|-\rangle\langle+|e^{-\frac{i\phi}{2}}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right]\cos\phi + i\left[|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|\right]\sin\phi$$

$$= S_x\cos\phi - S_y\sin\phi.$$