$(\frac{i\phi}{\hbar})^2$ 的系数：$-S_z S_x S_z + \frac{1}{2!} S_z^2 S_x + \frac{1}{2!} S_x S_z^2 = [S_z,[S_z,S_x]]$

$= (1 + iS_z\frac{\phi}{\hbar} + \frac{S_z^2}{2!}(\frac{i\phi}{\hbar})^2 \cdots) S_x (1 + S_z(\frac{-i\phi}{\hbar}) + \frac{S_z^2}{2!}(\frac{-i\phi}{\hbar})^2 \cdots)$

推导2：$e^{\frac{iS_z\phi}{\hbar}} S_x e^{-\frac{iS_z\phi}{\hbar}} = S_x + (\frac{i\phi}{\hbar})[S_z, S_x]$

$+ \frac{1}{2!}(\frac{i\phi}{\hbar})^2 [S_z,[S_z,S_x]] + \frac{1}{3!}(\frac{i\phi}{\hbar})^3 [S_z,[S_z,[S_z,S_x]]]$

$+ \cdots$

$= S_x[1 - \frac{\phi^2}{2!} + \cdots] - S_y[\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \cdots]$

$\boxed{\text{此推导只利用对易关系！}}$ 计算 $e^{iG\lambda} A e^{-iG\lambda}$. Baker-Hausdorff Lemma.

注意：$e^{\frac{-iS_z\phi}{\hbar}}|\alpha\rangle = e^{-\frac{i\phi}{2}}|+\rangle\langle+|\alpha\rangle + e^{\frac{i\phi}{2}}|-\rangle\langle-|\alpha\rangle$

如果我们旋转系统 2π，那 $|\alpha\rangle_R = -|\alpha\rangle$ ！

我们需要转 4π，才可以使 $|\alpha\rangle_R = |\alpha\rangle$.

这个效应是"真"的吗？——可否被实验测量？

- 自旋进动实验. $\langle S\rangle_R = R\langle S\rangle$ 与 $\mathcal{D}(R)$ 对态的"旋转"

$H = +\frac{e}{m_e c}\vec{S}\cdot\vec{B} = \omega S_z$，$\omega = \frac{eB}{m_e c}$

~~实~~ 时间演化 $U(t,0) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = e^{-\frac{iS_z\omega t}{\hbar}} = \mathcal{D}_z(\phi = \omega t)$

$U^\dagger \vec{S} U = e^{\frac{iS_z\omega t}{\hbar}} \vec{S} e^{-\frac{iS_z\omega t}{\hbar}}$

效果就是绕z轴转动自旋. 当 $t = \frac{2\pi}{\omega}$，$\langle\vec{S}\rangle_R = \langle\vec{S}\rangle$

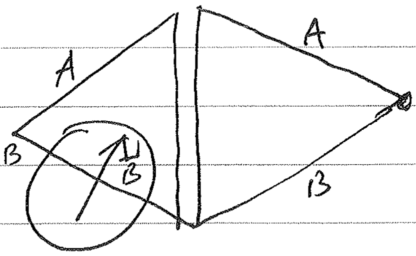
1、$\langle\vec{S}\rangle_R = R\langle\vec{S}\rangle$ 2、$|\alpha(t)\rangle = U(t,0)|\alpha(0)\rangle = \mathcal{D}_z(\omega t)|\alpha(0)\rangle$

实验：muon 转动. $m_\mu = 210 m_e$. muon ~~···~~ 衰变，电子从其磁矩负方向射出 ⇐ 据此判断自旋方向

当 $t = \frac{4\pi}{\omega}$，$|\alpha\rangle_R = +|\alpha\rangle$.

$t = \frac{2\pi}{\omega}$，$|\alpha\rangle_R = -|\alpha\rangle$ 怎样用实验证实？

中子干涉实验.



• 单色中子分成 A, B 两束.

• B束通过磁场，态矢旋转相位 $e^{\pm i\omega T/2}$,

T为通过磁场的时间. $\omega = \frac{g_n e B}{m_p c}$ $(g_n \sim -1.91)$

• 当两束中子再度相遇

过B到: $C_2 = e^{\mp i\omega T/2} C_2(B=0)$

过A到: $C_1 = C_2 e^{i\delta}$

强度 $\propto |C_1 + C_2|^2$ 起伏 $\propto \cos\left(\frac{\omega T}{2} + \delta\right)$.

调节 $\vec{B}$ 强度. 改变 ω.

$\Delta B = \frac{4\pi\hbar c}{e g_n \lambda l}$, 利用了 $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{\hbar^2 (\frac{1}{\lambda^2})}{2m}$

$v = \frac{\hbar}{m\lambda}$, $T = \frac{l}{v}$

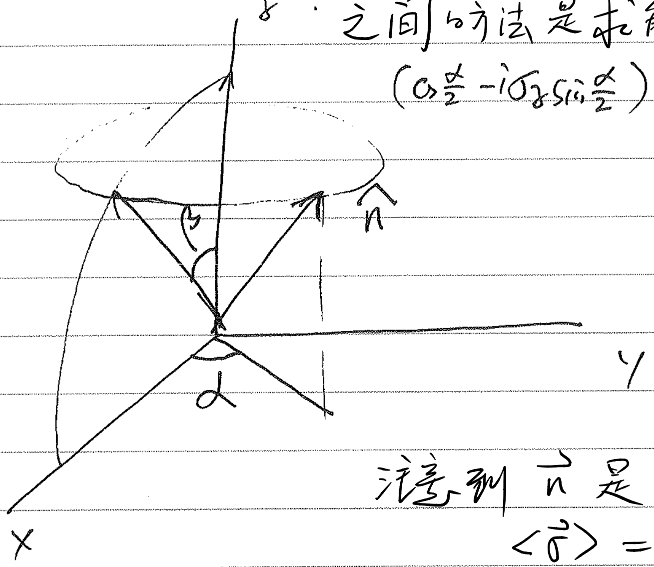
$\frac{g_n e \Delta B T}{2 m_p c} = \frac{\omega T}{2} = 2\pi$.

(Rauch. Phys. Lett. 54A, 425 (1975).
Werner, phys. Rev. Lett. 35, 1053 (1975))

用 $\vec{\sigma}$ 表示便的. $(\sigma\cdot\hat{n})^n = \begin{cases} 1 & \text{even } n \\ \sigma\cdot\hat{n}. & \text{odd } n. \end{cases}$

$$e^{-\frac{i\vec{S}\cdot\hat{n}\phi}{\hbar}} = e^{-\frac{i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\phi}{2}} = 1\cos\frac{\phi}{2} - i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\sin\frac{\phi}{2}$$

$\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\ |\alpha\rangle = |\alpha\rangle$. $\quad |\alpha\rangle \to |\hat{n},+\rangle$.



之间的方法是求解本征方程

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sigma_z\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta}{2} - i\sigma_y\sin\frac{\beta}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2}\, e^{-i\alpha/2} \\ \sin\frac{\beta}{2}\, e^{\frac{i\alpha}{2}}\end{pmatrix}$$

注意到 $\vec{n}$ 是 $|\hat{n},+\rangle$ 下 $\vec{\sigma}$ 的期望值

$$\langle\vec{\sigma}\rangle = \vec{n}$$

$\vec{n}$ 可由 z 绕 y 转 β, 再绕 z 转 α 得到.
因此对应的 $|\hat{n}+\rangle$ 也可由 $|+,z\rangle$ 经同样步骤得到.

$$|n+\rangle = \mathcal{D}_z(\alpha)\,\mathcal{D}_y(\beta)\,|+,z\rangle$$