2、SO(3), SU(2) 及欧拉转动

• 正交群 (orthogonal Group).

3个实数确定一个转动：θ, φ 定方向；ϕ 定转动 → 不方便

不如用 3×3 正交矩阵：相继操作 $R_1\cdot R_2$ 容易进行.

独立参数？ $3\times3=9$ 个实数，但是 $RR^T=1$ (∵长度不变)

对应 6个方程.

∴ 独立参数 $=3$. $(RR^T=R^TR=1)$

所有的正交矩阵构成一个群. 满足

1. R_1R_2 也是正交矩阵. 属于这个群，如果 R_1 与 R_2 是正交的.

2. $R_1\cdot(R_2\cdot R_3)=(R_1\cdot R_2)\cdot R_3$

3. 满足 $R\cdot \mathbb{1}=\mathbb{1}\cdot R=R$ 的 $\mathbb{1}$ 是正交矩阵. (单位元)

4. R 的逆 R^{-1}，它满足 $R\cdot R^{-1}=R^{-1}\cdot R=\mathbb{1}$，也是正交矩阵，或者说也是群的元素. (member).

此群称为 SO(3) 群，S → Special, O → orthogonal, 3 → 3D

$(|R|=1$. 不是 $-1)$.

• Unitary group.

设 $U=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$, $\quad U\begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_+' \\ c_-' \end{pmatrix}$. 旋量 spinor

注: $U^\dagger U=1$ 可保证 $|c_+|^2+|c_-|^2=|c_+'|^2+|c_-'|^2=1$.

例: $U=e^{-\frac{i\vec\sigma\cdot\hat n\phi}{2}}=\cos\frac{\phi}{2}\times\mathbb{1}-i\vec\sigma\cdot\hat n\sin\frac{\phi}{2}$

$$=\begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2}-in_z\sin\frac{\phi}{2}, & (-in_x-n_y)\sin\frac{\phi}{2} \\ (-in_x+n_y)\sin\frac{\phi}{2}, & \cos\frac{\phi}{2}+in_z\sin\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}$$

此矩阵还~~是~~满足 unimodular: $|U|=1$.

• 利用性质. $|U|=1$: $|a|^2+|b|^2=1$.

可导出: $U\cdot U^+ = U^+U=1$.

• U 的独立参数为 3， 对旋量绕 $\hat{n}$ 转 ϕ 可以一般性地写为 $U(a,b)$

$$Re(a)=\cos\frac{\phi}{2},\quad Im(a)=-n_z\sin\frac{\phi}{2}$$
$$Re(b)=-n_y\sin\frac{\phi}{2},\quad Im(b)=-n_x\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

a, b 称 Cayley-Klein parameters.

• 群性质.

1. $$U(a_1,b_1)\,U(a_2,b_2)=U(a_1a_2-b_1b_2^*,\ a_1b_2+b_1a_2^*)$$

$$|a_1a_2-b_1b_2^*|^2+|a_1b_2+a_2^*b_1|^2=1$$

2. $$U^{-1}(a,b)=U(a^*,-b).$$

称为 SU(2) 特殊幺正群 (special unitary)

一般幺正群. $U=e^{i\gamma}\begin{pmatrix}a & b\\ -b^* & a^*\end{pmatrix}$, $\gamma^*=\gamma$

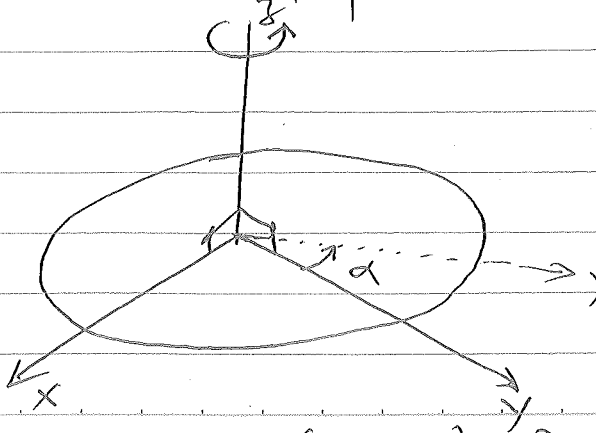
• SO(3), SU(2) 都描述转动 ⇒ 同构 (isomorphic)? 一一对应.

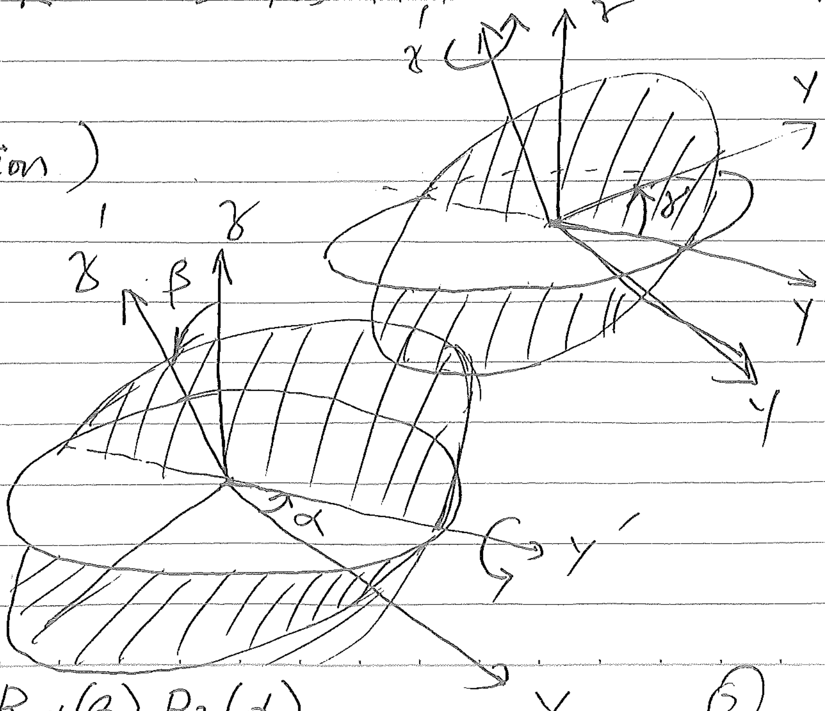
不对。SO(3): $2\pi = 4\pi$ 转. SU(2) 不是

$\left.\begin{array}{l}U(a,b)\\ U(-a,-b)\end{array}\right\}$ 同一个 R ∵ ϕ 与 $\phi+2\pi$ 是同一个 SO(3) 转动.

• 欧拉转动 (Euler Rotation)

刚体转动.





$$R(\alpha,\beta,\gamma)\equiv R_{z'}(\gamma)\,R_{y'}(\beta)\,R_z(\alpha)$$

$\star \quad R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z^{-1}(\alpha)$.

证：① 两种操作 y' 指向一致.

② z' 与 z 夹角 β 一致. 方位角 α 一致.

类似地 $\quad R_{z'}(\gamma) = R_{y'}(\beta) R_z(\gamma) R_{y'}^{-1}(\beta)$

因此 $\quad R_{z'}(\gamma) R_{y'}(\beta) R_z(\alpha) = R_{y'}(\beta) R_z(\gamma) R_{y'}^{-1}(\beta) R_{y'}(\beta) R_z(\alpha)$

$$= R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z^{-1}(\alpha) R_z(\gamma) R_z(\alpha)$$

$$= R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma) = R(\alpha, \beta, \gamma)$$

将此公式应用到自旋 $\frac{1}{2}$ 系统. 与 $R(\alpha,\beta,\gamma)$ 对应

$$\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathcal{D}_z(\alpha) \mathcal{D}_y(\beta) \mathcal{D}_z(\gamma).$$

$$= \exp\left(\frac{-i\sigma_z\alpha}{2}\right) \exp\left(-\frac{i\sigma_y\beta}{2}\right) \exp\left(\frac{-i\sigma_z\gamma}{2}\right)$$

S_z 表象

$$= \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\alpha}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma/2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{(\alpha+\gamma)}{2}} \cos\frac{\beta}{2}, & -e^{-i\frac{(\alpha-\gamma)}{2}} \sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i\frac{(\alpha-\gamma)}{2}} \sin\frac{\beta}{2}, & e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

上面用到: $\quad e^{-\frac{i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}}{2}\phi} = \mathbb{I}\cos\frac{\phi}{2} - i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\sin\frac{\phi}{2}$

以上称为 $j=\frac{1}{2}$ 不可约表示 $\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma)$ 的. 记为

$$\mathcal{D}^{(\frac{1}{2})}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = \langle j=\tfrac{1}{2}, m' | e^{-\frac{iJ_z\alpha}{\hbar}} e^{-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}} e^{-\frac{iJ_z\gamma}{\hbar}} | j=\tfrac{1}{2}, m\rangle$$

3. 角动量的本征值与本征态

- 利用对易关系 $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$ 得到 $[J^2, J_\alpha] = 0$.
  寻找 J^2 与 J_z 的共同本征态 $|\beta, m\rangle$.

  定义梯子算符 (Ladder operator) $J_\pm = J_x \pm i J_y$

  利用 $[J_\pm, J^2] = 0$, $[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$

  以及 $J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$, $J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$.

  可导出. $\beta = j(j+1)$, $m = -j, -j+1, \cdots, j-1, j$.
  $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$.

- 角动量算符的矩阵

$$J_\pm |j m\rangle = \hbar \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)}\ |j, m \pm 1\rangle$$

于是 $\langle j', m' | J_\pm | j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)}\ \delta_{j'j}\ \delta_{m', m\pm 1}$

J^2, J_z 是对角矩阵.

- 转动算符的表示.

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R) = \langle j, m' | \exp\left(-\frac{i \mathbf{J}\cdot\hat{n}\,\phi}{\hbar}\right) | j, m\rangle$$

Wigner function

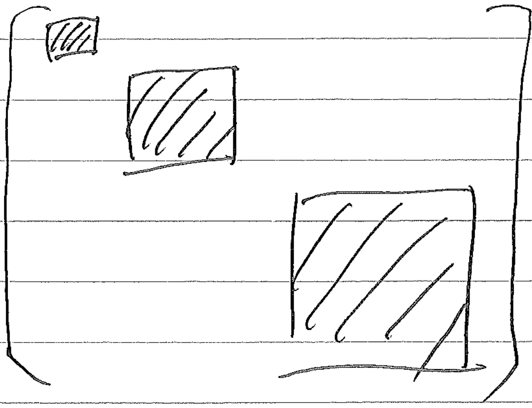
只考虑一个 j; 由于 $J^2 \mathcal{D}(R) |j, m\rangle = \mathcal{D}(R) J^2 |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 \mathcal{D}(R)|j, m\rangle$

所以 $\mathcal{D}(R)|j, m\rangle$ 仍是 J^2 本征态 | 转动 $\mathcal{D}(R)$ 的

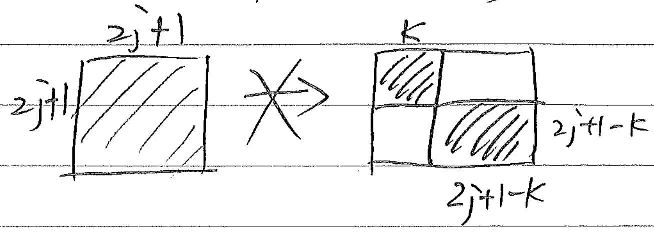
$\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R)$ 是 $(2j+1) \times (2j+1)$ 矩阵, 称为 $(2j+1)$ 维

~~$\mathcal{D}(R)$~~ 不可约表示 (irreducible)

一个转动矩阵可以由不止一个j值描述，此矩阵可以是块对角的.



每个块本身不能进一步分块.



每个j下的矩阵形成一个群

1. $\phi=0$. 单位元. 2. $\phi\to-\phi$ 逆.(同一个$\hat{n}$)

3. $\sum_{m'} \mathcal{D}^{(j)}_{m''m'}(R_1)\,\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R_2) = \mathcal{D}^{(j)}_{m''m}(R_1R_2)$.

- 转动矩阵是么正的: $\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R^{-1}) = \mathcal{D}^{(j)*}_{m'm}(R)$.

- 转动矩阵的物理重要性.

$$\mathcal{D}(R)|j,m\rangle = \sum_{m'} |j,m'\rangle\langle j,m'|\mathcal{D}(R)|j,m\rangle$$
$$= \sum_{m'} |j,m'\rangle \underbrace{\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R)}_{\text{几率幅}}.$$

- 欧拉转动.

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = \langle j,m'|e^{-\frac{iJ_z\alpha}{\hbar}}\, e^{-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}}\, e^{-\frac{iJ_z\gamma}{\hbar}}|j,m\rangle$$
$$= e^{-i(m'\alpha+m\gamma)} \underbrace{\langle j,m'|e^{-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}}|j,m\rangle}_{d^{(j)}_{m'm}(\beta)}$$

$d^{(j)}_{m'm}(\beta)$. 非平庸转动.(非对角)

例子: $j=\frac{1}{2}$, $d^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$