量子力学中的对称性

§ 对称性、守恒律、简并

· 经典物理中的对称性

拉氏量 $L(q_i, \dot{q}_i)$，如果在变换 $q_i \to q_i + \delta q_i$ 下不变，则 $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$，$\Rightarrow$ 由 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

得 $\frac{dp_i}{dt} = 0$． p_i 是正则动量，$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

正则动量守恒．

哈密顿形式也是类似的． $\boxed{\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{dp_i}{dt} = 0}$

即 H 不显著依赖 q_i，或称 H 有变换 $q_i \to q_i + \delta q_i$ 下的对称性．则动量守恒．

· 量子力学中的对称性．

前面知道一个幺正算符 $\mathscr{S}$ 对应平移（或转动），习惯上称其为对称算符．（不论物理系统是否真的有 $\mathscr{S}$ 下对称性）
对于无穷小变换

$$\mathscr{S} = 1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} G \qquad G \text{ Hermitian，生成元}$$

设 H 在 $\mathscr{S}$ 变换下不变，即

$$\mathscr{S}^{+} H \mathscr{S} = H \qquad \left(\langle\alpha|\mathscr{S}^{+} H \mathscr{S}|\alpha\rangle = \langle\alpha|H|\alpha\rangle\right)$$

意味着 $\quad [H, G] = 0$

由 Heisenberg 方程： $\boxed{\frac{dG}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[G, H] = 0}$

G 是常数，例如 $\mathscr{S}$ 是平移，G 是动量．

从本征态看：设 $t = t_0$ 时，系统处于 $|g'\rangle$，$G|g'\rangle = g'|g'\rangle$

$|t\rangle = U(t, t_0)|g'\rangle$ 仍是 G 属于 g' 的本征态．

• 简并性.

设 $[H, \mathcal{S}] = 0$. $E_n|n\rangle = H|n\rangle$

由于 $H(\mathcal{S}|n\rangle) = \mathcal{S} H|n\rangle = E_n \mathcal{S}|n\rangle$

如果 $\mathcal{S}|n\rangle$ 与 $|n\rangle$ 不同, 则 它们是简并的.

考虑 转动 : $[\mathcal{D}(R), H] = 0$

$\Longrightarrow [\vec{J}, H] = 0$, $[J^2, H] = 0$.

可以找到 J^2, J_z, H 的共同本征态 $|n, j, m\rangle$

由 $[\mathcal{D}(R), H] = 0 \Rightarrow \mathcal{D}(R)|n; j, m\rangle$ 能量不变!

由之前讨论. $\mathcal{D}(R)|n; jm\rangle = \sum_{m'} |n j m'\rangle\langle j m'|\mathcal{D}|n, j m\rangle$

$= \sum_{m'} |n j m'\rangle \mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R)$

由于 任意 $\mathcal{D}(R)|n j m\rangle$ 态 能量相同. 等效

$|n j m\rangle$ (不同的 m) 一定能量相同.

∴ 简并度为 $2j+1$. (与之前使用 $J_\pm$ 得到的结论一致).

简单应用 : $H = \frac{p^2}{2m} + V(r) + V_{LS}(r)\, \vec{L}\cdot\vec{S}$

由于 r 与 $\vec{L}\cdot\vec{S}$ 都是旋转不变的, 所以

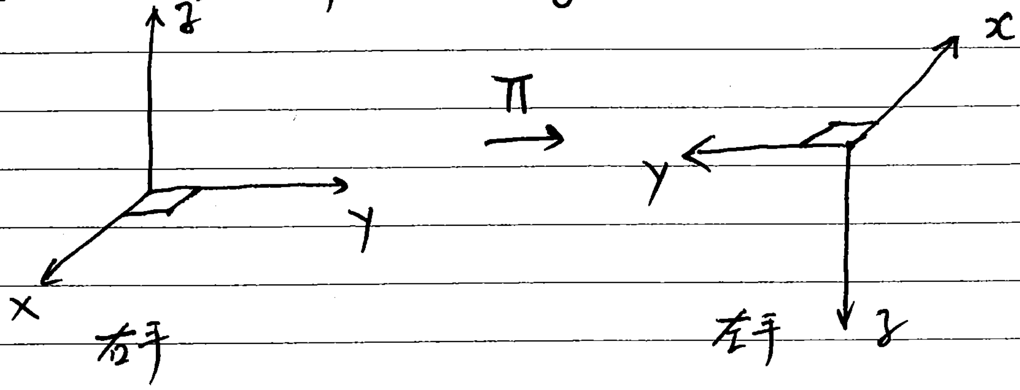
能级 应该是 $2j+1$ 重简并.

相反, 如果 沿 z 方向 加 电场 或 磁场, 旋转对称性

破坏, 不再有 $2j+1$ 重简并. $\longrightarrow$ Zeeman 效应.

§ 离散对称性，宇称（或空间反射）

首先讨论宇称算符 (parity) → 空间反射



看看 Hilbert ket 空间

$$|\alpha\rangle \longrightarrow \pi|\alpha\rangle, \qquad \pi^{\dagger}\pi = \pi\pi^{\dagger} = 1 \text{ 幺正}$$

效果应该是

$$\langle\alpha|\pi^{\dagger}\vec{x}\,\pi|\alpha\rangle = -\langle\alpha|\vec{x}|\alpha\rangle$$

也就是 $\pi^{\dagger}\vec{x}\,\pi = -\vec{x}$，或 $\vec{x}\pi = -\pi\vec{x}$

由于 $\vec{x}\,\pi|\vec{x}'\rangle = -\pi\,\vec{x}\,|\vec{x}'\rangle = (-\vec{x}')\,\pi|\vec{x}'\rangle$

∴ $\pi|\vec{x}'\rangle$ 是 $\vec{x}$ 的本征值为 $-\vec{x}'$ 的本征态

∴ $\pi|\vec{x}'\rangle = e^{i\delta}|-\vec{x}'\rangle$ 可任意，但一般选 $\delta=0$.

$$\pi^2|\vec{x}'\rangle = \pi|-\vec{x}'\rangle = |\vec{x}'\rangle$$

$\pi^2 = 1 \Rightarrow \pi = \pi^{\dagger} = \pi^{-1} \Rightarrow \pi$ 厄密的. 本征值 ± 1.