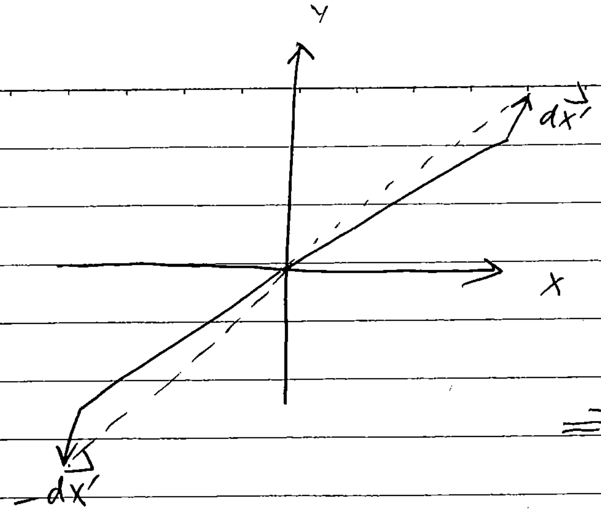


• ~~角~~动量

$$\pi \mathcal{T}(d\vec{x}') = \mathcal{T}(-d\vec{x}')\,\pi$$

$$\pi\left(1 - \frac{i\vec{p}\cdot d\vec{x}'}{\hbar}\right)\pi^{\dagger} = 1 + \frac{i\vec{p}\cdot d\vec{x}'}{\hbar}$$

$$\Longrightarrow \{\pi, \vec{p}\} = 0. \qquad \pi^{\dagger}\vec{p}\,\pi = -\vec{p}$$

• 角动量在宇称变换下的行为

1. 轨道角动量也可以定义为 $\vec{L} \equiv \vec{x}\times\vec{p} \Longrightarrow [\pi, \vec{L}] = 0$.

① 对应经典 ② 满足 $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$.

③. $\left[1 - i\left(\frac{\delta\phi}{\hbar}\right)L_z\right]|x', y', z'\rangle = \left[1 - i\left(\frac{\delta\phi}{\hbar}\right)(xp_y - yp_x)\right]|x', y', z'\rangle$

$= \left[1 - i(\delta\phi\, x')\frac{p_y}{\hbar} + i\left(\frac{p_x}{\hbar}\right)(\delta\phi\, y')\right]|x', y', z'\rangle$

$= |x' - y'\delta\phi,\ y' + x'\delta\phi,\ z'\rangle$ 平移 $y' \to y' + x'\delta\phi,\ x' \to x' - y'\delta\phi$

$\vec{p}$ 产生平移, $\vec{L}$ 产生转动.

④. $\langle x', y', z'|\left[1 - i\frac{\delta\phi}{\hbar}L_z\right]|\alpha\rangle = \langle x' + y'\delta\phi,\ y' - x'\delta\phi,\ z'|\alpha\rangle$

或 $\langle r, \theta, \varphi|\left[1 - i\frac{\delta\phi}{\hbar}L_z\right]|\alpha\rangle = \langle r, \theta, \phi - \delta\phi|\alpha\rangle$

$= \langle r, \theta, \phi|\alpha\rangle - \delta\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\langle r\theta, \phi|\alpha\rangle$

即 $\langle r, \theta, \phi|L_z|\alpha\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\langle r\theta, \phi|\alpha\rangle$

⑤. 证明 $[\pi, \vec{L}] = 0$:

$[\pi\,\vec{x}\times\vec{p} - \vec{x}\times\vec{p}\,\pi]\,\pi^{\dagger}|\alpha\rangle = [\pi\vec{x}\pi^{\dagger}\times\pi\vec{p}\pi^{\dagger} - \vec{x}\times\vec{p}]\,|\alpha\rangle = 0$

2. 自旋也成立

考虑3维空间转动与反射.

$$R^{(p)} R^{(r)} = R^{(r)} R^{(p)} \longrightarrow \text{对易}.$$

其中 $R^{(p)} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$

所以. $\pi \mathcal{D}(R) = \mathcal{D}(R)\pi$ $\quad \mathcal{D}(R) = 1 - i\frac{\vec{J}\cdot\vec{n}}{\hbar}\varepsilon$

$\Rightarrow [\pi, J] = 0$. or $\pi^{\dagger} J \pi = J$.

$\vec{J}$ 与 $\vec{x}$ 在转动情况下变换一致, $\Rightarrow$ 都为矢量.

但 $\vec{x}, \vec{p}$ 在 π 下是奇的, ~~而~~ $\vec{J}$ 是偶的.

polar vectors　　axial vectors, pseudo vectors

• $\vec{S}\cdot\vec{x}$

R下不变, 标量. 类似于 $\vec{S}\cdot\vec{L}$, $\vec{x}\cdot\vec{p}$

但是 π 下. $\pi^{\dagger}\vec{S}\cdot\vec{x}\,\pi = -\vec{S}\cdot\vec{x} \longrightarrow$ pseudoscalar.

$\pi^{\dagger}\vec{S}\cdot\vec{L}\,\pi = \vec{L}\cdot\vec{S}$

· 宇称变换下的波函数

$$\psi(x') = \langle x'|\alpha\rangle$$

求一个空间反射，$|\alpha\rangle \to \pi|\alpha\rangle$

$$\langle x'|\pi|\alpha\rangle = \langle -x'|\alpha\rangle = \psi(-x')$$

如果 $|\alpha\rangle$ 是 π 的本征态：$\pi|\alpha\rangle = \pm|\alpha\rangle$

$$\left.\begin{aligned}\langle x'|\pi|\alpha\rangle &= \pm\langle x'|\alpha\rangle \\ &= \psi(-x')\end{aligned}\right\} \quad \psi(-x') = \pm\psi(x') \ \text{偶奇}$$

动量本征态：$e^{\frac{ip}{\hbar}x}$ 不是宇称 $\because p\pi = -\pi p$.

角动量本征态应该有宇称，$\because [L,\pi]=0$.

$$R(r)Y_{lm} = \langle r,\theta,\varphi|\alpha,lm\rangle$$

$$\langle r,\theta,\varphi|\pi|\alpha,lm\rangle = \langle r,\pi-\theta,\phi+\pi|\alpha,lm\rangle$$
$$= R(r)(-1)^l Y_{lm}.$$

定理：设 $[H,\pi]=0$，$H|n\rangle = E_n|n\rangle$ 且 $|n\rangle$ 不简并
则 $|n\rangle$ 有宇称性.

证明：$\because \pi\,\frac{1}{2}(1\pm\pi)|n\rangle = \left(\frac{1}{2}\pi \pm \pi^2\right)|n\rangle = \pm\frac{1}{2}(1\pm\pi)|n\rangle$

$\therefore \frac{1}{2}(1\pm\pi)|n\rangle$ 是 π 本征态，本征值 ±1.

且 $H\left(\frac{1}{2}(1\pm\pi)|n\rangle\right) = \frac{1}{2}(E_n \pm \pi E_n)|n\rangle$

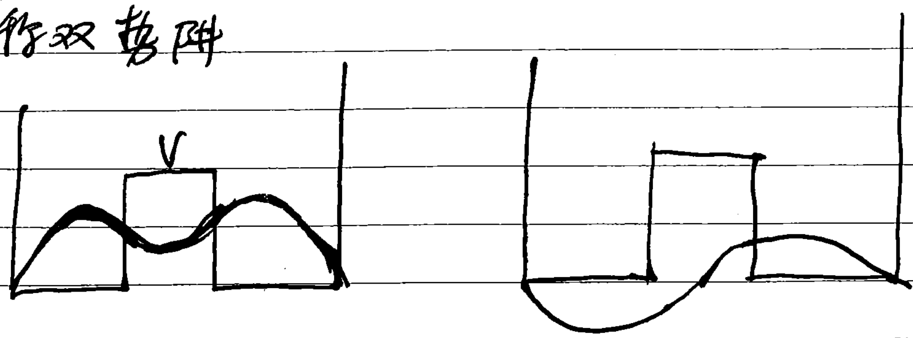
$$= E_n\left(\frac{1}{2}(1\pm\pi)|n\rangle\right)$$

$\therefore |n\rangle$ 与 $\frac{1}{2}(1\pm\pi)|n\rangle$ 是一个态（由于非简并）

$\therefore |n\rangle$ 是有宇称的.

例 谐振子.

· 对称双势阱



对称 $|S\rangle$ 反对称 $|A\rangle$

对称双势阱 $[H,\Pi]=0$. 最低两个能级 一个 $|S\rangle$, 一个 $|A\rangle$

$E_A > E_S$. 由于曲率大, 动能大.

构造 $|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|S\rangle + |A\rangle)$, $|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|S\rangle - |A\rangle)$

① 没有宇称性. ② 非能量本征态 → 不是定态

$$|R(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{E_S t}{\hbar}}|S\rangle + e^{-i\frac{E_A t}{\hbar}}|A\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{E_S t}{\hbar}}\left(|S\rangle + e^{-i\frac{(E_A - E_S)}{\hbar}t}|A\rangle\right)$$

当 $t = \frac{2\pi\hbar}{(E_A - E_S)2} = \frac{T}{2}$ $|R(t)\rangle = |L\rangle$!

$t = T$, $|R(t)\rangle = |R\rangle$.

从隧穿角度理解: 由一侧穿过势垒来到另一侧.

当 $V\to\infty$, $|A\rangle$ 与 $|S\rangle$ 是简并的. 于是 $|R\rangle$ 与 $|L\rangle$ 也是能量本征态

一旦处于 $|L\rangle$, 将处于 $|L\rangle$ forever. ($T\to\infty$)

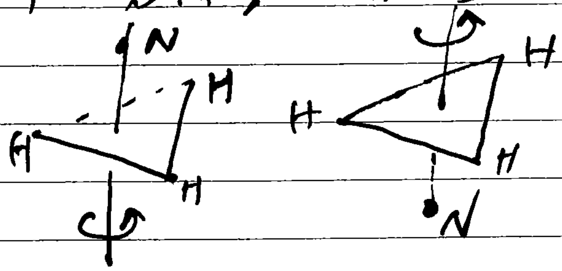
虽然 H 是空间反射不变的, 基态却是非对称的. 这是由于简并.

这是一个对称性破缺的例子.

自然界有大量这样的事情. 比如 Ising 铁磁体. H 是上下对称的

但磁矩却要么朝上, 要么朝下, 即态没有上下对称性.

类似于双势阱, NH_3 分子.



N 位于 H平面上与下 对应 $|R\rangle$ 与 $|L\rangle$.

能量与 π 本征态是 $|R\rangle$ 与 $|L\rangle$ 的叠加.

或 $|R\rangle$ 是 $|S\rangle$ 与 $|A\rangle$ 的叠加. $|L\rangle$ 类似.

$\frac{E_A-E_S}{\hbar} \sim 24000\,\text{MHz}$. 波长 1cm. 微波.

自然界有些有机物, 比如糖、氨基酸, 只存在 R型 或 L型 $\longrightarrow$ 手性. ~~han~~ handedness

实际振荡时间之需长: 10^4-10^6 年!

- 宇称选择规则.

设 $\pi|\alpha\rangle = \varepsilon_\alpha|\alpha\rangle$, $\pi|\beta\rangle = \varepsilon_\beta|\beta\rangle$; $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta = \pm 1$.

则. $\langle\beta|\vec{x}|\alpha\rangle = 0$, 除非 $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_\beta$

证明: $\langle\beta|\vec{x}|\alpha\rangle = \langle\beta|\pi^\dagger\pi\,\vec{x}\,\pi^\dagger\pi|\alpha\rangle = -\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\langle\beta|\vec{x}|\alpha\rangle$

其实就是 $\int \psi_\beta^* \vec{x} \psi_\alpha d\tau = 0$，当 ψ_β、ψ_α 宇称相同

辐射的选择定则. due to Wigner.

对于非简并能级（对 H 空间反射不变系统）.

$\langle n | \vec{x} | n \rangle = 0 \longrightarrow$ 电偶极矩为 0.

奇宇称算符（π 作用后反号）只在不同宇称态间矩阵元不为零.

偶宇称算符相反.

- 宇称守恒：若 $[H,\pi]=0$，$\pi|\alpha(0)\rangle = \varepsilon|\alpha(0)\rangle$，那么 $\pi|\alpha(t)\rangle = \pi U(t)|\alpha(0)\rangle = U(t)\pi|\alpha(0)\rangle = \varepsilon|\alpha(t)\rangle$
- 宇称不守恒

描述基本粒子间弱相互作用的 H 不是空间反射不变的

衰变的终态可以是相反宇称态的叠加.

衰变产物的角动量分布依赖 pseudoscalars，$\langle \vec{s} \rangle \cdot \vec{p}$

李-杨首先提出弱相互作用中宇称不守恒。

后续实验测量 $\vec{s} \cdot \vec{p}$ 证实了他们的理论.

原子核、原子态宇称是混合的.