相对论量子力学初步

时间演化算符 $U(t,0)=e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$

S-eq: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$，怎样满足相对论要求？

自由粒子 $E_p^2 = p^2c^2+m^2c^4 \xrightarrow{c=1} p^2+m^2$.

★ 找到一个 H，$|p\rangle$ 是 H 的本征态，本征值为 E_p

$\boxed{\text{一个方法:}}$ $E_p=\sqrt{p^2+m^2}=m\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2}}$

$$= m+\frac{p^2}{2m}-\frac{p^4}{8m^3}+\frac{p^6}{16m^5}$$

$$H = mc^2+\frac{p^2}{2m}-\frac{p^4}{8m^3c^2}+\frac{p^6}{16m^5c^4}$$

低能极限：$mc^2+\frac{p^2}{2m}$，其中 mc^2 不动.

问题：坐标表象 $p \to -i\hbar\nabla$，$\psi(x)=\langle x|\psi\rangle$

时间一阶导，空间无穷阶导数 → 时空不对等.

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = i\frac{\partial}{\partial t}\langle x|\psi(t)\rangle = \langle x|H|\psi(t)\rangle = \cancel{m\psi(x,t)} + \frac{-\partial^2}{2m\partial x^2}\psi(x,t) - \cdots$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\langle x|\psi(t)\rangle = \int d^3p\,\langle \vec{x}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|H|\psi(t)\rangle$$

$$=\int d^3x'\int d^3p\,\langle x|p\rangle\langle p|x'\rangle\langle x'|E_p|\psi(t)\rangle$$

$$=\int d^3x'\int d^3p\,\frac{e^{i\vec{p}\cdot(x-x')}}{(2\pi)^3}\langle x'|E_p|\psi(t)\rangle$$

$-i\hbar\nabla$ 的 n 次方求和.

$$(-i\hbar\nabla)^n\psi(x')$$

$\boxed{\text{另一个方法:}}$ ~~[illegible]~~. 对 S-eq 再求一次导.

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\psi(t)\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}H|\psi(t)\rangle = H^2|\psi(t)\rangle$$

$$H^2=p^2+m^2,\quad \langle x|p^2|\psi\rangle = -\nabla^2\psi(x,t)$$

$$\therefore \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2+m^2\right]\psi(x,t)=0. \quad \boxed{\text{Klein-Gordon eq.}}$$

去掉 m^2 之后 经典 波动方程. $\frac{m^2}{\hbar^2}\to\left(\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)c^2$.

Compton 波长.

• KG方程之协变性.

Lorentz 转动不改变 $ds^2 = dt^2 - dx^2$

参照系变化. $(\vec{x}, t) \xrightarrow{L} (\vec{x}', t')$

$\psi(\vec{x}, t) \longrightarrow \psi(\vec{x}', t')$ 也是解.

约定. ① Greek indices: 0, 1, 2, 3. Latin: 1, 2, 3.

② 重复指标求和.

③ $a^\mu \equiv (a^0, \vec{a})$ 反协变 (逆变) contravariant 4矢: four-vector

↓对偶

$\boxed{a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu}$ $\Rightarrow$ $a_0 = a^0,\ a_1 = -a^1,\ a_2 = -a^2,\ a_3 = -a^3$ 或 $a_\mu = (a^0, -\vec{a})$

$g_{00} = 1,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$

$g_{\mu\neq\nu} = 0$.

④ 内积 $a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b}$ 只能在协变与反协变间 (逆变)

• Lorentz 变换下不变.

设Λ为Lorentz变换矩阵

证明 $a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu,\ b'_\mu = \Lambda_\mu{}^\lambda b_\lambda$

$a'^\mu b'_\mu = g_{\mu\nu} a'^\mu b'^\nu$

$= g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\delta a^\lambda b^\delta$

$= g_{\lambda\delta} a^\lambda b^\delta = a^\lambda b_\lambda$

⑤ 时空位置 4矢 $x^\mu = (t, \vec{x})$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \equiv \partial_\mu$$ 协变导数

KG eq: $\left[\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right]\psi(\vec{x}, t) = 0$ • $\partial_\mu \partial^\mu$ 变换不变!

自由粒子解 $\psi(x,t) = N e^{-iEt + i\vec{p}\cdot\vec{x}} = N e^{-ip^\mu x_\mu}$

其中 $p^\mu = (E, \vec{p}) \longleftarrow$ 4维动量

这是由于: $-p^\mu p_\mu + m^2 = -E^2 + p^2 + m^2 = 0$.

• 困难: $E = -E_p$, 上面的平面波解仍成立.

- 另一个困难：S-eq 中 $|\psi|^2 = \rho(x,t)$ 正定

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0. \quad 其中 \vec{J} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$$

现在定义 $$j^\mu = \frac{i}{2m}(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*)$$

由K-G，可证 $\partial_\mu j^\mu = 0$. 理解为几率守恒，因此

$$\rho(x,t) = j^0(x,t) = \frac{i}{2m}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right]$$

- 满足 $\int \rho\, dx^3$ 守恒
- 但是，不正定！不好解释为几率

- 对于K-G方程 在H中引入电磁作用 非常容易 $E\to E-e\phi$，$\vec{p}\to\vec{p}-e\vec{A}$

对应 $p^\mu \longrightarrow p^\mu - eA^\mu$ 其中 $A^\mu = (\phi, \vec{A})$

$A_\mu = (\phi, -\vec{A})$

由于 $P_\mu = (E, -\vec{p}) \xrightarrow[\text{量子化}]{QM} i\partial_\mu = (i\partial_t, i\nabla)$

因此定义 $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ $\quad (p_\mu \to -i\hbar\partial_\mu)$

K-G 化为

$$\boxed{D_\mu D^\mu + m^2}\psi(\vec{x},t) = 0. \quad D_\mu 称协变导数.$$

方程仍然是相对论协变的

- 要定2阶微分方程的解，需要 $\psi(x,t)\big|_{t=0}$，和 $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\big|_{t=0}$. 带来很多困难.