2.3 Heisenberg 方程

在Heisenberg picture下，力学量尊从Heisenberg 方程。正确的量子化得到的H方程应该与对应的经典力学方程一致，这是Ehrenfest定理的结论。

利用$[x_i, P_i] = i\hbar$, 我们得到

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x_i, H] = (P_i - \frac{qA_i}{c})/\mu \tag{2.37}$$

这正是机械动量与正则动量的关系。说明量子化方案$P = i\hbar\nabla$的正确。

我们引入记号$\Pi = P - qA/c$. 利用$P = i\hbar\nabla$容易证明

$$[\Pi_i, \Pi_j] = \frac{i\hbar q}{c}\epsilon_{ijk}B_k \tag{2.38}$$

B_k是磁感应强度的k分量. ϵ是全反对称张量.

这一对易关系完全不同于我们熟悉的正则动量的对易关系。（在没有矢量场的量子力学中，$\Pi = P$.）利用这一对易关系，以及

$$[\Pi, \phi] = [P, \phi] = -i\hbar\nabla\phi \tag{2.39}$$

我们来推导Π遵从的H 方程. (由于Π中A可以显含时间，应加上$\partial\Pi/\partial t$)

$$\mu\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d\Pi}{dt} = q[\vec{E} + \frac{1}{2c}(\frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{B} - \vec{B} \times \frac{d\vec{x}}{dt})] \tag{2.40}$$

这一方程正好就是(2.4). 这再次证明正则量子化$P = i\hbar\nabla$的正确.

2.4 朗道能级

考虑电子处于均匀磁场$\vec{B}$（选为z方向）中，忽略自旋，研究其空间运动. 经典电动力学告诉我们，电子受Lorentz力，作圆运动，能量可以取任意值，半径取决于能量$\frac{1}{2}\mu v^2$和磁场强度。

$$\frac{eBv}{c} = \mu\frac{v^2}{r} \tag{2.41}$$

解出

$$r = \frac{\mu c}{eB}v \tag{2.42}$$

周期$T = 2\pi r/v$, 圆频率为$\omega_c = \frac{eB}{\mu c}$

为表示均匀磁场，矢势$\vec{A}$可取为

1. $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$, 即$A_x = -\frac{1}{2}By, A_y = \frac{Bx}{2}, A_z = 0$ 这是对称规范, 满足$\nabla\cdot\vec{A} = 0$.

2. $A_x = -By, A_y = A_z = 0$. 这称为Landau规范, 也满足$\nabla\cdot\vec{A} = 0$

我们考虑Landau规范, $q = -e$.

$$H = \frac{1}{2\mu}[(P_x - \frac{eB}{c}y)^2 + P_y^2 + P_z^2] \tag{2.43}$$

分离变量$\psi(x,y,z) = \psi(x,y)e^{ik_z z}$. z方向独立，为自由运动. $E_z = \hbar^2k_z^2/2\mu$. 因此写出$x-y$方向的哈密顿量

$$H_{xy} = \frac{1}{2\mu}[(P_x - \frac{eB}{c}y)^2 + P_y^2] \tag{2.44}$$

并简写为H. 也可以认为我们研究电子在二维平面内的运动。

能量本征方程:

$$H\psi_E(x,y) = E\psi_E(x,y) \tag{2.45}$$

总能量如果考虑z方向动能就是$E + E_z$.

由于H中没有x,

$$[P_x, H] = 0. \tag{2.46}$$

可以选力学量完全集为(H, P_x), 并设

$$\psi_E(x,y) = e^{ik_x x}\phi(y), \tag{2.47}$$

其中$k_x = \frac{P_x'}{\hbar}$, P_x' 为$\hat{P}_x$本征值. 注意并不是机械动量的本征值。$e^{ik_x x}$也不是x方向机械动量的本征态。代入(2.45)

$$\frac{1}{2\mu}[(P_x' - \frac{eB}{c}y)^2 - \hbar^2\frac{d^2}{dy^2}]\phi(y) = E\phi(y) \tag{2.48}$$

令$y_0 = \frac{cP_x'}{eB}$, 方程化为

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\phi''(y) + \frac{1}{2}\mu\omega_c^2(y-y_0)^2\phi(y) = E\phi(y), \tag{2.49}$$

其中$\omega_c = \frac{eB}{\mu c}$为谐振子的圆周频率, 正是经典圆周运动的圆频率，且此为谐振子本征方程！

- 平衡点y_0与P'_x有关
- 电子的能级$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c, n = 0, 1, 2, \cdots$. 这就是著名的朗道能级。
- 本征函数

$$\phi_n(y) = N_n e^{-\frac{\alpha^2(y-y_0)^2}{2}} H_n(\alpha(y-y_0)), \alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega_c}{\hbar}}$$

- 由于$\psi_E(x,y) = e^{ik_x x}\phi_n(y)$，给定$n$,则$E$给定，简并度由$k_x$的取值决定: 不同的$k_x$, 谐振子中心的位置$y_0$不同，但能量相同。
- 若系统无限大，简并度无穷，因为k_x不受限制.
- 若L_x有限，周期边界，那么

$$e^{ik_x(x+L_x)} = e^{ik_x(x)} \Rightarrow k_x = \frac{2\pi}{L_x} \times n_x, n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

同时真实系统L_y也有限, y_0的范围: $0 < y_0 < L_y$, 我们来看看L_y内能容纳多少个y_0? $y_0 = \frac{ch}{eBL_x} \times n_x$, 两个$y_0$间隔$ch/(eBL_x)$, 因此

$$N = \frac{L_y}{ch/eBL_x} = \frac{BL_xL_y}{hc/e} \tag{2.50}$$

这就给出了Landau能级的简并度. 可以写成

$$f = \frac{BA}{\frac{hc}{e}}, \tag{2.51}$$

A为面积, $\phi \equiv \frac{hc}{e}$称为磁通量子. 即简并度等于总磁通除以磁通量子: 系统可以容纳的磁通量子数.

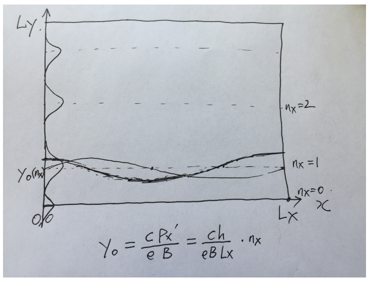

Figure 2.1: 电子基态简并的N个基态波函数示意图: $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_c$, $\psi_0(x,y) = \phi_0(y)\exp(ik_x x)$.

跟经典图像对比一下很有意思。当$E=\frac{1}{2}\hbar\omega_c$, 对应速度$v_0$, 算出电子回旋半径$r_0$, 其占据面积$a=\pi r_0^2=\frac{hc}{2eB}$. 在面积为$A$的平面内可以容纳$2f$个经典轨道！如果能量升高到$E_n$, 那么可以容纳的经典轨道数是$f/(n+1/2)$. 与朗道能级的简并度相差就很大了。