§ 规范变换的一些讨论.

经典: $V(\vec r) \longrightarrow V(\vec r)+V_0$ V_0为常数

不影响力学量的时间演化.

量子? $\tilde H = H + V_0 = \frac{p^2}{2m}+V(\vec r)+V_0$

设初态 $|\alpha(0)\rangle$, 分别计算 $V(\vec r)$ 与 $\tilde V(\vec r)=V(\vec r)+V_0$ 下的态矢时间演化 $|\alpha(t)\rangle$ 与 $|\tilde\alpha(t)\rangle$.

$$|\tilde\alpha(t)\rangle = e^{-i\frac{\tilde H t}{\hbar}}|\alpha(0)\rangle = e^{-i\left(\frac{p^2}{2m}+V(x)+V_0\right)\frac{t}{\hbar}}|\alpha(0)\rangle$$

$$= e^{-iV_0 t/\hbar}|\alpha(t)\rangle . \qquad \because [V_0, p^2]=0.$$

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|\alpha(0)\rangle = \sum_E C_E\, e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|E\rangle$$

$$H|E\rangle = E|E\rangle,$$

$$= \sum_E C_E\, e^{-i\frac{Et}{\hbar}}|E\rangle.$$

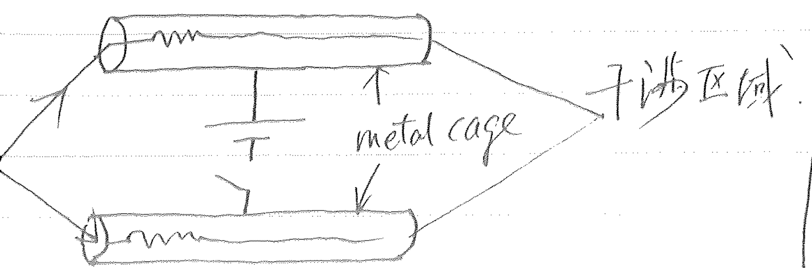
$$|\tilde\alpha(t)\rangle = \sum_E C_E\, e^{-i\frac{E+V_0}{\hbar}t}|E\rangle.$$

任一物理量. $\langle Q\rangle = \sum_{E,E'} C_{E'}^* C_E \langle E'|Q|E\rangle\, e^{-i\frac{(E-E')t}{\hbar}}$

只依赖于 $E-E'$, ∴ 与 V_0 无关.

这是一个平庸的 gauge 变换!

甚至可以让 $V_0(t)$! $|\tilde\alpha(t)\rangle = e^{-i\int_0^t dt' \frac{V_0(t')}{\hbar}}|\alpha(t)\rangle$



带电粒子波包远小于 cage 长度.

进入 cage, 开, 出 cage 前关.

粒子不受力. ∵ 内部电场为零.

但是波的相位不同: $\phi_1-\phi_2 = \frac{1}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dt\,[V_2(t)-V_1(t)]$

可以看到干涉效应!

- 纯量子力学! ∵ $\hbar\to 0$ 时, $\cos(\Delta\phi)$, $\sin(\Delta\phi)$ 太快!

§ 磁单极子 magnetic Monopole

麦克斯韦. $\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$ 致电荷

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{c\,\partial t}$$

但是 $\nabla\cdot\vec{B} = 0$

$$\nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

似对称
但不完美
磁场由运动电荷
或静止的磁偶极子产生。

如果 $\nabla\cdot\vec{B} = 4\pi\rho_M$ 就完美了

ρ_M 是磁荷密度. e_M 为磁荷 或磁单极子 磁场的源 (soure) 类似于 e 电荷.

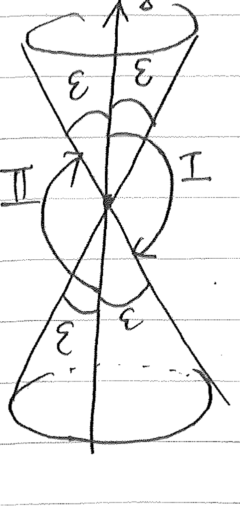
量子力学虽然不能预言磁荷 ρ_M 的存在，但是，如果它存在，则要求它的大小是由 e, $\hbar$, c 因量子化的.

证明:

假设有一个点磁单极子 e_M. 位于原点，产生静磁场 $\vec{B}$

$$\vec{B} = \frac{e_M}{r^2}\hat{r}$$

但矢势为 $$\vec{A} = \frac{e_M(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\phi}$$



这是根据
$$\nabla\times\vec{A} = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r} + \left[\frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}$$

但是 $\vec{A}$ 在负z轴发散! 不可能找到单一函数

因为: $\oint_{S'}\vec{B}\cdot d\vec{S} = 4\pi e_M$ 但 如果A 非奇异 $\nabla\cdot(\nabla\times A) = 0$

则 $\oint_{S'}\vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot(\nabla\times A)\,dS = 0$

矛盾!

如果我们放弃单一$\vec{A}$的要求（只要算出$\vec{B}$就行），取

$$A^{(I)} = \left(\frac{e_M(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\right)\hat{\phi} \qquad \theta<\pi-\varepsilon$$

$$A^{(II)} = -\left(\frac{e_M(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}\right)\hat{\phi} \qquad \theta>\varepsilon$$

☆ 在重叠区域，$A^{(I)}$与$A^{(II)}$任意选，但一定要有个gauge变换，因为$\vec{B}$一样的要求。

$$A^{(II)}-A^{(I)} = -\frac{2e_M\hat{\phi}}{r\sin\theta} = \nabla\Lambda$$

利用 $\nabla\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi}\hat{\phi}$

有：$\boxed{\Lambda=-2e_M\phi}$

现在考虑带电e的粒子在$\vec{B}=\frac{e_M}{r^2}\hat{r}$的磁场中，其波函数

$$\psi^{(II)} = e^{\frac{-2iee_M\phi}{\hbar c}}\psi^{(I)}$$

• 你可以选$g=Ne$，最后得到$e_M=\pm\frac{n\hbar c}{2g}$

$\psi^{(II)}$与$\psi^{(I)}$必须都是单值的。我们来看$\theta=\frac{\pi}{2}$，固定r。

$$\psi^{(I)}(r,\tfrac{\pi}{2},0) = \psi^{(I)}(r,\tfrac{\pi}{2},2\pi).$$

• 如果你选的$g\neq e$，你就错过了发现e_M是$\frac{\hbar c}{2|e|}$整数倍的机会 :)

$$\begin{cases}\psi^{(II)}(r,\tfrac{\pi}{2},0) = \psi^{(I)}(r,\tfrac{\pi}{2},0)\\ \psi^{(II)}(r,\tfrac{\pi}{2},2\pi) = e^{-\frac{4iee_M\pi}{\hbar c}}\psi^{(I)}(r,\tfrac{\pi}{2},2\pi)\end{cases}$$

$$\therefore \frac{2ee_M}{\hbar c}=\pm n,\ n=0,\pm1,\pm2\ldots \Rightarrow e_M=\pm\frac{n\hbar c}{2|e|}$$

这就是磁荷的量子化！
一旦有磁荷e_M其值必是$\frac{\hbar c}{2|e|}$的整数倍！

1931. Dirac
T. T. Wu and C. N. Yang 1968.