2.2 规范变换与规范不变

规范变换(gauge tranform):

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda \tag{2.19}$$

$$\psi \to \phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{c\partial t} \tag{2.20}$$

$\mathbf{E}, \mathbf{B}$场不变，但是波函数会不会改变?

可以证明, 如果$\psi(\mathbf{r}, t)$是薛定谔方程(2.12)的解，那么

$$\psi \to \psi' = e^{i\frac{q\Lambda}{\hbar c}}\psi \tag{2.21}$$

是变换后(2.12)的解，即只差一个相因子.

证明:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(e^{\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}\psi) = -\frac{q\partial\Lambda}{c\partial t}\psi' + e^{\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \tag{2.22}$$

$$(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}')\psi' = e^{\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A})\psi \tag{2.23}$$

$$(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}')^2\psi' = e^{\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A})^2\psi \tag{2.24}$$

$$q\phi'\psi' = e^{\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}(q\phi - \frac{\partial\Lambda}{c\partial t})\psi \tag{2.25}$$

因此

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(e^{\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}\psi) = [\frac{1}{2\mu}(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}')^2 + q\phi']e^{i\frac{q\Lambda}{\hbar c}}\psi \tag{2.26}$$

规范变换虽然改变了波函数，但是

- 不改变波函数的几率解释

  (1) ρ不变

  (2) 利用(2.18), 容易证明

$$j' = \frac{\rho}{\mu}(\nabla(S + \frac{q\Lambda}{c}) - \frac{q}{c}(A + \nabla\Lambda) = j \tag{2.27}$$

- 虽然这个相因子是位置的函数，但是可以证明坐标和（机械）动量的期望值都不便. 与原来的波函数表示同一个物理状态。

  利用

$$\int d^3x\vec{j} = \frac{\langle(P - \frac{qA}{c})\rangle}{\mu} = \frac{\langle\Pi\rangle}{\mu} \tag{2.28}$$

  即可证明Π规范不变.

以上可以用‘规范不变(gauge invariant)’来总结。

下面我们来作更一般的描述.

可以令变换前态为$|\alpha\rangle$, 变换后态为$|\alpha'\rangle$. 设

$$|\alpha'\rangle = \mathcal{G}|\alpha\rangle \tag{2.29}$$

首先我们要求

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\alpha'|\alpha'\rangle = 1 \tag{2.30}$$

即前后态都归一化. 这样的变化可以理解为Hilbert空间里矢量的‘转动’. 这要求

$$\mathcal{G}^\dagger\mathcal{G} = 1, \tag{2.31}$$

即变换是幺正的。

选取不同的规范，不应该改变物理量的期望值。这就要求

$$\langle\alpha|\mathcal{G}^\dagger\mathbf{x}\mathcal{G}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\mathbf{x}|\alpha\rangle \tag{2.32}$$

$$\langle\alpha|\mathcal{G}^\dagger\mathbf{\Pi}'\mathcal{G}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\mathbf{\Pi}|\alpha\rangle \tag{2.33}$$

也就是要求

$$\mathcal{G}^\dagger\mathbf{x}\mathcal{G} = \mathbf{x} \tag{2.34}$$

$$\mathcal{G}^\dagger\mathbf{\Pi}'\mathcal{G} = \mathbf{\Pi} \tag{2.35}$$

假设

$$\mathcal{G} = e^{\frac{iq\Lambda(\mathbf{x},t)}{\hbar c}} \tag{2.36}$$

就可以满足以上要求。

由于$[x,\mathcal{G}] = 0$, Eq.(2.34)是显然的。

利用$[P,\mathcal{G}] = -i\hbar\nabla\mathcal{G}, \mathbf{\Pi}' = P - qA'/c$, 可以证明Eq.(2.35).

也就是说规范变换导致的态矢量旋转，保证了$\langle x\rangle$, $\langle\Pi\rangle$ 不变. (但是$\langle P\rangle$变了).