我们也可以在对称规范里讨论：由于$\vec{P}\cdot\vec{A}=\vec{A}\cdot\vec{P}=\frac{B}{2}(x\hat{P}_y-y\hat{P}_x)=\frac{B}{2}\hat{L_z}$,

$$
\begin{aligned}
H_{xy} &= \frac{1}{2\mu}[(\hat{P}_x-\frac{eB}{2c}y)^2+(\hat{P}_y+\frac{eB}{2c}x)^2] \\
&= \frac{1}{2\mu}(\hat{P_x}^2+\hat{P_y}^2)+\frac{e^2B^2}{8\mu c^2}(x^2+y^2)+\frac{eB}{2\mu c}\hat{L_z}
\end{aligned}
$$

后两项为可理解为$-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$,

$$\mu_z=-\frac{\partial H}{\partial B}=\frac{e}{2\mu c}\hat{L_z}-\frac{e^2B}{4\mu c}(x^2+y^2)$$

最后一项由B诱导，为诱导磁矩. 在原子内部，电子移动范围x^2+y^2小，可以忽略.

我们来求解能量本征方程。

选取极坐标：

$$-\hbar^2\nabla^2=P_x^2+P_y^2=-\hbar^2(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho})-\frac{\hbar^2}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

其中$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}=P_\rho^2$, 为径向动量的平方。最后一项为角向动量平方$\frac{L_z^2}{\rho^2}$. 于是

$$H_{xy}=\frac{P_\rho^2}{2\mu}+\frac{L_z^2}{2\mu\rho^2}+\frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2+\omega_L\hat{L_z}, \tag{2.52}$$

其中$\omega_L=\frac{eB}{2\mu c}=\frac{\omega_c}{2}$, 称为Larmor 频率.

除去最后一项，这是一个二维简谐振子的哈密顿量！

注意到H_{xy}与L_z对易，取(H_{xy},L_z)为完全集. 设$\psi(\rho,\varphi)=R(\rho)e^{im\varphi}$, 定义$\chi=\rho^{\frac{1}{2}}R$, 可得到径向本征方程

$$
\begin{aligned}
\frac{-\hbar^2}{2\mu}\chi''+\frac{\hbar^2}{2\mu\rho^2}(m^2-\frac{1}{4})\chi+\frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2\chi=(E-m\hbar\omega_L)\chi \\
\chi''+\frac{2\mu}{\hbar^2}(E'-\frac{(m+\frac{1}{2})(m-\frac{1}{2})\hbar^2}{2\mu\rho^2}-\frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2)\chi=0
\end{aligned}
$$

其中$E'=E-m\hbar\omega_L$. 后者就是二维谐振子的径向运动方程.

与三维中心力势径向方程

$$\chi"+\frac{2\mu}{\hbar^2}(E-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}-\frac{1}{2}\mu\omega^2r^2)\chi=0 \tag{2.53}$$

比较, 我们看到对应关系$r\leftrightarrow\rho, l\leftrightarrow|m|-\frac{1}{2}$. 绝对值是考虑到：若$m<0$, 可以改写$(m+\frac{1}{2})(m-\frac{1}{2})=(-m-\frac{1}{2})(-m+\frac{1}{2})$.

对于三维谐振子, 已知三维谐振子的能级和径向本征函数

$$
\begin{aligned}
E' &= (2n_r+l+\frac{3}{2})\hbar\omega=(N+\frac{3}{2})\hbar\omega, \text{其中} N=2n_r+l \\
\chi &= r^{l+1}e^{-\frac{\alpha^2r^2}{2}}F(-n_r,l+\frac{3}{2},\alpha^2r^2)
\end{aligned}
$$

F为合流超几何级数, $\alpha = \sqrt{\mu\omega/\hbar}$.

我们可以类比得到二维谐振子$V = \frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2$的能量本征值和径向波函数

$$E' = (2n_\rho + |m| - \frac{1}{2} + \frac{3}{2})\hbar\omega_L = (N' + 1)\hbar\omega_L, \tag{2.54}$$

其中$N' = 2n_\rho + |m|$,

$$\chi = \rho^{|m|+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha_L^2\rho^2}{2}} F(-n_\rho, |m| + 1, \alpha_L^2\rho^2) \tag{2.55}$$

其中$\alpha_L^2 = \mu\omega_L/\hbar = eB/(2\hbar c)$.

最后得到

$$E = E' + m\hbar\omega_L = (N + 1)\hbar\omega_L = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c, \tag{2.56}$$

其中用到$N = 2n_\rho + |m| + m$, $n = n_\rho + \frac{|m|+m}{2}$. 这一结果与前面得到的朗道能级结果是一致的.

讨论

- 所有$m < 0$的态能量相同！这表明能级简并度无穷: 给定n_ρ情况下，$m < 0$时转动动能越大，$|m|$给出磁矩势能越低. 另外要注意，L_z也不是机械角动量。

  在朗道规范下，无穷大系统的能级简并度也是无穷大.

- 如果考虑实际系统尺寸有限: A为一个圆盘. 利用每“个”波函数占面积大约为$\approx \pi(\frac{1}{\alpha_L^2}) = \frac{hc}{eB}$, 我们仍然可以算出简并度为$f = \frac{BA}{\frac{hc}{e}}$

  我们看到不同的‘规范’给出了完全不同的能量本征波函数，但是能级公式是一样的。简并度是一样的。

  前面讨论朗道规范下，有限尺寸系统时使用的边界条件是x方向周期，所以无法对应到对称规范的情形.

- 在能级简并情况下，能量本征函数不同很正常，这是由于选取了不同的力学量完全集，相当于选取不同的Hilbert空间的基矢而已。你可以理解为直角坐标基矢与球坐标基矢的不同。

  可以参照对比：选取(H_x, H_y, Hz)为完全集与选取(H, L^2, L_z)为完全集的三维各向同性谐振子的能量本征函数。