2.5 园环上带电粒子的能谱与磁通

无限长螺线管半径a, 内部$B\hat{z}$, 外部为$B=0$. 但是外部$\vec{A}$不为零, 如图2.5

$$\begin{aligned} r>a,\vec{A} &= \frac{\Phi}{2\pi r}\hat{\phi}, \\ r\le a,\vec{A} &= \frac{r}{2}B\hat{\phi} \end{aligned}$$

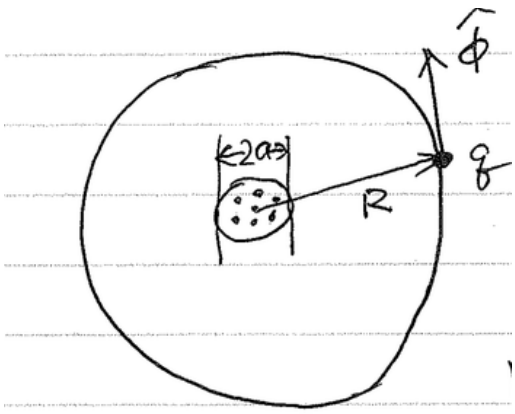

Figure 2.2: 无限长螺线管的磁场和矢势

这里的规范为$\nabla\cdot\vec{A}=0$, $\Phi=\pi a^2 B$为磁通.
根据$\oint\vec{B}\cdot d\vec{S}=\oint\nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S}=\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}$加对称性，求出$\vec{A}$.
在没有加磁通时,

$$H=\frac{P_\varphi^2}{2\mu}=\frac{L_z^2}{2\mu R^2}$$

H的本征态和本征值为:

$$\begin{aligned} \psi_m(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}e^{im\varphi}, m=0,\pm1,\pm2,\cdots \\ E_m &= \frac{m^2\hbar^2}{2\mu R^2} \end{aligned}$$

加上磁通之后,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\mu}(P_\varphi-\frac{q}{c}A_\varphi)^2 \\ &= \frac{1}{2\mu}(\frac{-i\hbar\partial}{R\partial\varphi}-\frac{q}{c}\frac{\Phi}{2\pi R})^2 \\ &= \frac{-\hbar^2}{2\mu R^2}(\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{iq\Phi}{2\pi\hbar c})^2 \end{aligned}$$

求解本征方程

$$H\psi(\varphi)=E\psi(\varphi) \tag{2.57}$$

试探解

$$\psi(\varphi) = \Psi(\varphi)e^{\frac{iq\Phi}{2\pi\hbar c}\varphi}$$

$$\because \quad (\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{iq\Phi}{hc})\Psi e^{\frac{iq\Phi}{hc}\varphi} = (\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi})e^{\frac{iq\Phi}{hc}\varphi}$$

本征方程化为

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu R^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Psi = E\Psi$$

$\therefore \Psi(\varphi) = e^{im'\varphi}, E = \frac{m'^2\hbar^2}{2\mu R^2}$ 但是周期边界要求：$\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$

$$\therefore m' + \frac{q\Phi}{hc} \equiv m = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \psi(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

即能谱：$E_m = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2}(m - \frac{q\Phi}{hc})^2$变了！其中$\frac{\Phi}{\frac{hc}{q}}$是以量子磁通$\frac{hc}{q}$为单位的磁通.

设想零时刻螺线管没有通电，电子能级为$E_m = \frac{m^2\hbar^2}{2\mu R^2}$. 电子处于$m = 0$的基态。现在缓慢增加螺线管电流，则其能量开始上升，但波函数仍然是$\psi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$.

粒子的机械角动量

$$\begin{aligned} R(P_\varphi - \frac{q}{c}A_\varphi)\psi(\varphi) &= (\frac{-i\hbar\partial}{\partial\varphi} - \frac{q}{c}\frac{\Phi}{2\pi})\psi(\varphi) \\ &= m'\hbar\psi(\varphi) \end{aligned}$$

左边括号中是机械动量.

m'的取值受磁通限制！（但是这里$\frac{\Phi}{\frac{\hbar c}{q}}$并不一定是整数，即没有量子化）

我们看到在没有B的地方，系统能通过A ‘感觉到’远处的磁通！这个效应又称为‘定态’AB 效应。

2.5.1 AB 效应

粒子在$\nabla \times \vec{A} = 0 = \vec{B}$的区域非定态运动: 一个荷电粒子从左端进入圆环, 我们考虑含时薛定谔方程

$$\frac{1}{2\mu}(\frac{-i\hbar\partial}{R\partial\varphi} - \frac{q}{c}\frac{\Phi}{2\pi R})^2\psi(\varphi, t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\varphi, t)}{\partial t} \tag{2.58}$$

试探解

$$\psi(\varphi, t) = \Psi(\varphi, t)e^{\frac{iq\Phi}{\hbar c}\varphi} \tag{2.59}$$

其中$\Psi(\varphi, t)$含时

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu R^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Psi(\varphi, t) = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{2.60}$$

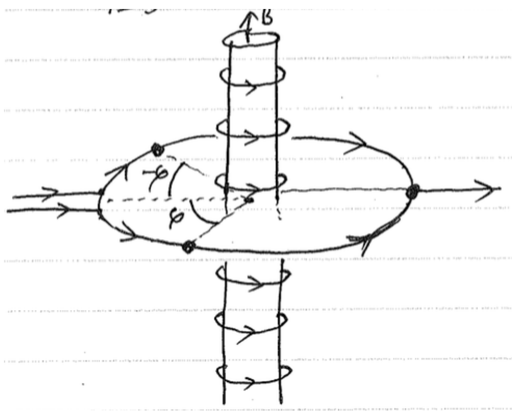

Figure 2.3: 无限长螺线管的磁场和矢势

此粒子的波函数分为两部分，φ与$-\varphi$：当两部分为$\varphi=\pi$处汇合

$$\psi(\pi,t)=\Psi(\pi,t)e^{\frac{iq\Phi}{\hbar c}\pi}+\Psi(-\pi,t)e^{-\frac{iq\Phi}{\hbar c}\pi} \tag{2.61}$$

$\Psi(\pi,t)$与$\Psi(-\pi,t)$是同一位置，同一时间的波函数，由与磁通无关的(2.60)式解出，因此$\Psi(\pi,t)$与$\Psi(-\pi,t)$的相位与磁通无关.

但是(2.59)式与路径有关，所以(2.61)中两部分波函数有“相差”$\Delta\varphi=\frac{q\Phi}{\hbar c}$. 可以通过改变磁通调整，并在实验上观察到干涉效应, 这就是著名的Aharonov-Bohm effect（AB效应）。

(2.59)中$\frac{iq\Phi}{\hbar c}\varphi$的更一般表述为：$\frac{iq}{\hbar c}\int_l \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r}, l$为路径. 由斯托克斯定理，两条路径的相位差正好是$q\Phi/\hbar c$.