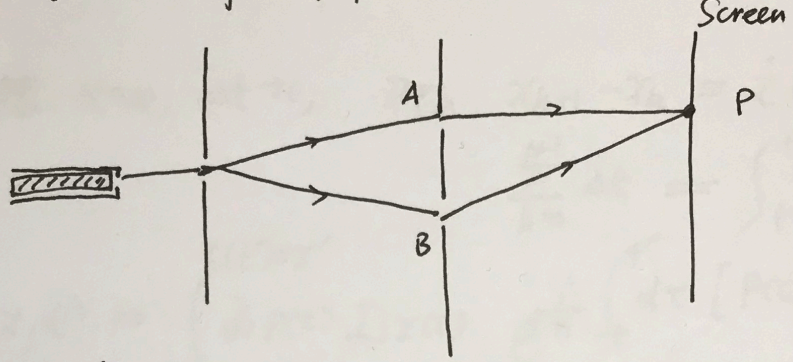
§ 路径积分量子化

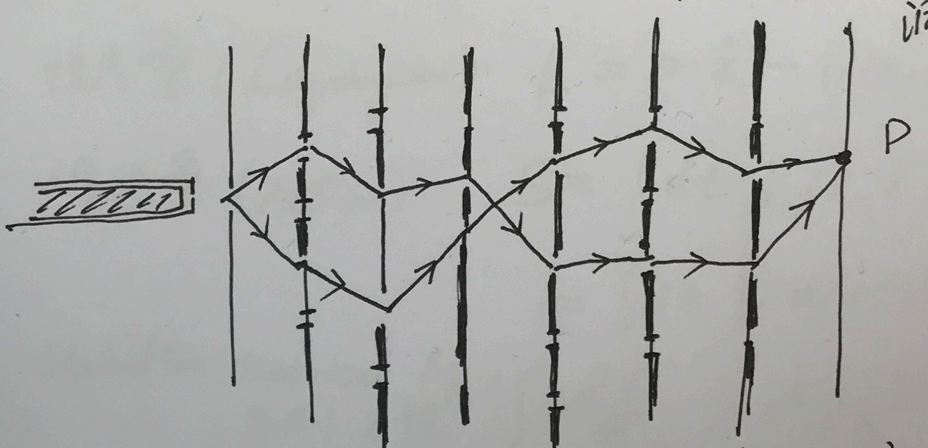
让我们考虑一个最简单的实验：



电子枪发射一个电子，该电子可通过路径 P_A 到达屏上 P 点，也可以通过经路 P_B 到达 P 点。

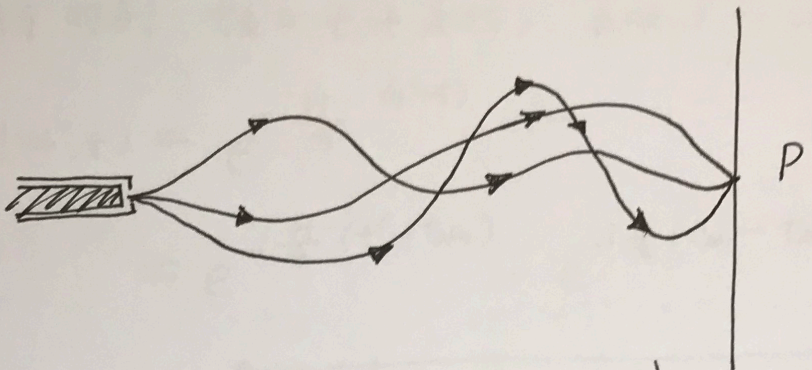
记两条路径到达 P 点的几率幅分别为 a_A 与 a_B。由于"程差"，$a_A/a_B \sim e^{i\varphi}$。因此在 P 点发现电子的几率为 $|a_A+a_B|^2 = |a_A|^2 + |a_B|^2 + 2|a_A||a_B|\cos\varphi$，这就是干涉条纹的来历。

据说 Feynman 问了一个问题：再放一个挡板会怎样？放 M 个呢？每个板上打不止一个洞呢？



M 个板上的 n 个洞：给出一条路径，记其到 P 的几率幅为 a_c，在 P 点找到电子的几率：$|\sum_c a_c|^2$

随着 $m\to\infty$, $n\to\infty$, 板没有了! 但"路径"还在.



$$\text{到 P 的几率} = \left|\text{所有路径的几率幅积分}\right|^2$$

- 这个图像与 Schrödinger 方程有什么关系?

我们来研究一个粒子的一维运动. 比如一维谐振子

满足: $i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = H|\psi\rangle$

写成波函数 $i\hbar\frac{\partial\langle x|\psi\rangle}{\partial t} = \langle x|H|\psi\rangle$

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = H\left(x,-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t)$$

其解可以用时间演化算符表示出来

$$|\psi(t')\rangle = U(t',t)\,|\psi(t)\rangle$$

其中 $U(t',t) = e^{-i\frac{\hat{H}\cdot(t'-t)}{\hbar}}$

$$\psi(x',t') = \langle x'|\psi(t')\rangle = \langle x'|\,U(t',t)\,|\psi(t)\rangle$$

$$= \int\langle x'|\,U(t',t)\,|x\rangle\langle x|\psi(t)\rangle\,dx$$

$$= \int U(x',t';x,t)\cdot\psi(x,t)\,dx$$

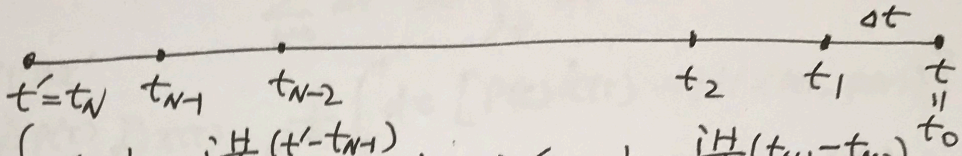
其中 $U(x',t';x,t) \equiv \langle x'|\,U(t',t)\,|x\rangle$

咱们把 $t'-t$ 这段时间分成 N 份： $t'-t = N\cdot\Delta t$

第k个时刻 $t_k = t + k\Delta t$， $k=0,1,\cdots,N \rightarrow t_N = t'$

$$U(t',t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}\cdot(t'-t)}$$

$$= e^{-i\frac{H}{\hbar}(t'-t_{N-1})} \cdot e^{-i\frac{H}{\hbar}(t_{N-1}-t_{N-2})} \cdots\cdots e^{-i\frac{H}{\hbar}(t_1-t)}$$



$$\langle x'|U(t',t)|x\rangle = \int \langle x'|e^{-i\frac{H}{\hbar}(t'-t_{N-1})}|x_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}|e^{-i\frac{H}{\hbar}(t_{N-1}-t_{N-2})}|x_{N-2}\rangle$$

$$\cdots|x_1\rangle\langle x_1|e^{-i\frac{H}{\hbar}(t_1-t)}|x\rangle\, dx_{N-1}\cdots dx_1$$

其中 $\langle x_{k+1}|e^{-i\frac{H\Delta t}{\hbar}}|x_k\rangle = U(x_{k+1},t_{k+1};x_k,t_k)$

$$\approx \langle x_{k+1}|(1-\frac{i}{\hbar}H\Delta t)|x_k\rangle \leftarrow \text{当 } \Delta t\rightarrow 0.$$

$$\langle x_{k+1}|H|x_k\rangle = \int dp_k \langle x_{k+1}|p_k\rangle\langle p_k|H|x_k\rangle$$

由于 H 是 $\hat{x}$ 与 $\hat{p}$ 的函数. $\hat{p}|p_k\rangle = p_k|p_k\rangle$, (k只标志第k个时刻.)

$$\langle p_k|H(x,p)|x_k\rangle = H(x_k,p_k)\langle p_k|x_k\rangle$$

$\langle x_k|p_k\rangle$ 是 $|p_k\rangle$ 的波函数：平面波 $\langle x_k|p_k\rangle = \frac{e^{i\frac{p_k x_k}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$

$$\langle p_k|x_k\rangle = \langle x_k|p_k\rangle^*$$

$$\therefore\ U(x_{k+1},t_{k+1};x_k,t_k) = \int dp_k \langle x_{k+1}|p_k\rangle\langle p_k|x_k\rangle \times\left(1-\frac{i\Delta t}{\hbar}H(x_k,p_k)\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_k}{2\pi\hbar}\, e^{i\frac{p_k}{\hbar}(x_{k+1}-x_k)-\frac{i\Delta t}{\hbar}H(x_k,p_k)}$$

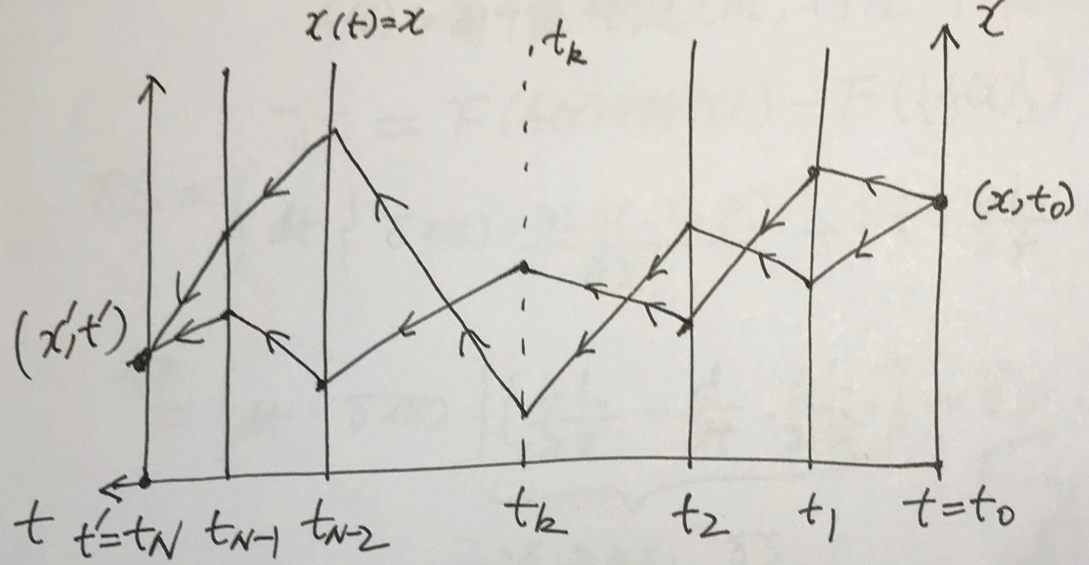
最后：

$$U(x',t';x,t)=\int\frac{dp_{N-1}\cdots dp_0}{(2\pi\hbar)^N}\int dx_{N-1}\cdots dx_1\cdot e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{k=0}^{N-1}\left[p_k(x_{k+1}-x_k)-H(x_k,p_k)\Delta t\right]}$$

取极限 $N\to\infty$, $\Delta t\to 0$, 那么 $x_{k+1}-x_k=\dot{x}(\tau)\Delta t$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\Delta t=\int_t^{t'}dt$$

$$\therefore U(x',t';x,t)=\int_{x(t)=x}^{x(t')=x'}\mathcal{D}p(\tau)\,\mathcal{D}x(\tau)\;e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'}d\tau\left[p(\tau)\dot{x}(\tau)-H(x(\tau),p(\tau))\right]}\qquad (A)$$



• 回顾经典力学：

拉氏量 (Lagrangian) $L=p\cdot\dot{x}-H(x,p)$

作用量 (Action) $S=\int dt\;L(x,\dot{x},p)$

$$=\int dt\left[p(t)\dot{x}(t)-H(x(t),p(t))\right]$$

Hamilton canonical Eq：
正则方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial H(x,p)}{\partial p}\\[2ex]\dfrac{dp}{dt}=-\dfrac{\partial H(x,p)}{\partial x}\end{cases}$$

可由最小作用量原理导出： $\delta S=0$

$$S=\int dt \ L(x(t),\dot{x}(t),p(t))$$ 一般称为 L 的泛函 (functional)

- 函数 是实数 x 与另一个实数 $f(x)$ 的映射.

$$f: x\in R \to f(x)\in R$$

- functional 是一个实数 F 与一个函数 $f(x)$ 的映射

$$F: f(x)\in H \longrightarrow F(\{f(x)\})\in R.$$

可以理解为 $F(f(x_1),\cdots,f(x_N))$ ← 多元函数.

$f(x)$ 的每个值确定之后，对应一个确定的 F.

$$\delta F = F(f(x)+\delta f(x)) - F(\{f(x)\})$$

$$\delta S=\int dt \left\{\delta x(t)\cdot\frac{\partial L(x,\dot{x},p)}{\partial x}+\delta\dot{x}\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}+\delta p\cdot\frac{\partial L}{\partial p}\right\}$$

$$\overset{分P}{=}\int dt \ \delta x(t)\cdot\left\{\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]}_{泛函导数\ \frac{\delta S}{\delta x}}+\delta p\cdot\underbrace{\frac{\partial L}{\partial p}}_{\frac{\delta S}{\delta p}}\right\}$$

任意的变化 δx, δp, 都有 $\delta S=0 \longrightarrow S$ 极值.

$$\Rightarrow ①\ \frac{\partial L}{\partial x}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Rightarrow -\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{dp}{dt}$$

$$② \ \frac{\partial L}{\partial p}=0 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}$$

这里①式是拉格朗日方程

回到量子力学公式(A)，路径的相因子 $e^{\frac{i}{\hbar}S}$

- S 就是经典力学作用量！
- $e^{\frac{i}{\hbar}S}$ 是一条路径的"振幅"：从 x,t 到 x',t' 的跃迁.

由于 $\hbar$ 很小. 很小的 S 变化，导致 $e^{\frac{i}{\hbar}S}$ 的剧烈变化，求和之后为零.
但是在 $\delta S=0$ 的路径附近，$e^{\frac{i}{\hbar}S}$ 不剧烈变化，对积分贡献大. $\longrightarrow$ 经典力学给出的路径是重要的路径.

(x',t') 与 (x,t) 之间的经典路径是怎样的？

$$x(t) = A\cos(\omega t+\delta)$$

A 与 δ 由 $x(t)=x$, $x(t')=x'$ 定出.