第11讲

$$U(t',t) = e^{i\frac{H}{\hbar}\cdot(t'-t)}$$

$$|t'\rangle = U(t',t)\,|t\rangle$$

$$\langle x'|t'\rangle = \int \langle x'|\,U(t',t)\,|x\rangle\langle x|t\rangle\, dx$$

定义 $U(x',t';x\,t) \equiv \langle x'|\,U(t',t)\,|x\rangle$

$$= \int_{x(t)=x}^{x(t')=x'} \mathcal{D}p(\tau)\,\mathcal{D}x(\tau)\; e^{\frac{iS}{\hbar}} \qquad \text{——— A}$$

$\mathcal{D}p(\tau) \equiv \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{dp_{N+1}\cdots dp_0}{(2\pi\hbar)^N}$, $\mathcal{D}x(\tau) \equiv \lim\limits_{N\to\infty} dx_{N+1}\cdots dx_1$

确定函数 $x(\tau), p(\tau)$, 也就确定了一条路径. path.

作用量 S 是 path 的泛函.

$S = \int_t^{t'} d\tau\, L(x(\tau), \dot{x}(\tau), p(\tau))$ ← 由 $x(\tau)$, $p(\tau)$ 决定的一个实数.

$L(\tau) = p(\tau)\,\dot{x}(\tau) - H(x(\tau), p(\tau))$ ← 由 τ 时刻 $x, \dot{x}, p$ 决定的一个实数.

- 每一条 path 决定一个振幅 $e^{\frac{iS}{\hbar}}$

- 一般而言, $x(\tau)$ 与 $p(\tau)$ 独立.

  $p(\tau) = m\,\dot{x}(\tau)$ 并不总是成立 ∵ 正则动量不一定等于机械动量

• 当 $H(x,p)=\frac{p^2}{2m}+V(x)$

S中依赖于 $p(\tau)$ 的部分是

$$\int_t^{t'} d\tau\left(p(\tau)\dot x(\tau)-\frac{p^2(\tau)}{2m}\right)=\int_t^{t'}d\tau\left[-\frac{(p(\tau)-m\dot x(\tau))^2}{2m}+\frac{m\dot x(\tau)^2}{2}\right]$$

$$U(x',t';x,t)=\int\mathcal{D}(x)\int\prod_\tau\frac{dp(\tau)}{2\pi\hbar}\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'}d\tau\left[-\frac{(p-m\dot x)^2}{2m}+\frac{m\dot x^2}{2}-V\right]}$$

完成对 $p(\tau)$ 的积分.

$$U(x',t';x,t)=\int\mathcal{D}(x)\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta\tau}\right)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'}d\tau\left[\frac{m\dot x(\tau)^2}{2}-V(x(\tau))\right]}$$

这里利用了 $\int_{-\infty}^{\infty}dp\, e^{-\frac{p^2}{2\left(\frac{m\hbar}{i\Delta\tau}\right)}}=\sqrt{2\pi}\left(\frac{m\hbar}{i\Delta\tau}\right)^{\frac{1}{2}}$

此时 $S=\int_t^{t'}d\tau\left[\frac{m\dot x(\tau)^2}{2}-V(x(\tau))\right]$

$$U(x't';xt)=\int_{x(t)=x}^{x(t')=x'}\mathcal{D}(x)\, e^{i\frac{S}{\hbar}} \longrightarrow (B)$$

其中 $\int_x^{x'}\mathcal{D}(x)=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{\frac{N}{2}}\int dx_{N-1}\cdots dx_1$

• 公式(A)与(B)是常见的两种形式，但(A)更基本，体现了 x 与 p 是独立的变量。特别是 $ip\dot x$ 可解释为 Berry phase 以后讲.

§ 等时对易关系的路径积分体现

考虑一个物理量 $F(x,p)$. 我们来计算它的"路径平均"

$$\langle F(\{x\},\{p\})\rangle \equiv \int \mathcal{D}x(\tau)\,\mathcal{D}p(\tau)\; F(\{x\},\{p\})\, e^{\frac{i}{\hbar}S(\{x\},\{p\})}$$

- 每条路径给出一个F值，它有个振幅 $e^{\frac{iS}{\hbar}}$

  $\langle F\rangle$ 是对所有路径的~~求和~~"加权"

我们可以把 $F(\{x\},\{p\})$ 理解成 $F(x_1,\cdots,x_{N-1},p_0,p_1,\cdots,p_{N-1})$

写成 $F(x(k),p(k))$

同时把积分离散化.

$$\int \mathcal{D}x\,\mathcal{D}p \longrightarrow \prod_k \int dx(k)\,dp(k)$$

引入变换：
$$x(k) = \tilde{x}(k) + y(k)$$
$$p(k) = \tilde{p}(k) + \zeta(k)$$

重新写 $\langle F\rangle$

$$\langle F(x(k),p(k))\rangle = \int \prod_k d\tilde{x}(k)\,d\tilde{p}(k)\; F(\tilde{x}(k)+y(k),\tilde{p}(k)+\zeta(k)) \times e^{\frac{i}{\hbar}S[\tilde{x}(k)+y(k),\,\tilde{p}(k)+\zeta(k)]}$$

$$= \int \prod_k d\tilde{x}(k)\,d\tilde{p}(k)\left(F + \sum_k y(k)\frac{\partial F}{\partial x(k)} + \sum_k \zeta(k)\frac{\partial F}{\partial p(k)}\right) \times \left(1+\frac{i}{\hbar}\sum_k y(k)\frac{\partial S}{\partial x(k)} + \frac{i}{\hbar}\sum_k \zeta(k)\frac{\partial S}{\partial p(k)}\right)e^{\frac{iS}{\hbar}}$$

$$= \langle F(x(k),p(k))\rangle + \sum_k y(k)\left\langle \frac{\partial F}{\partial x(k)} + \frac{i}{\hbar}F\frac{\partial S}{\partial x(k)}\right\rangle + \sum_k \zeta(k)\left\langle \frac{\partial F}{\partial p(k)} + \frac{i}{\hbar}F\frac{\partial S}{\partial p(k)}\right\rangle$$

以上展开到 $y(k)$ 与 $\zeta(k)$ 的一阶.

方程对任意变化 $\eta(k)$ 与 $\xi(k)$ 成立，因此

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x(k)} \right\rangle = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\partial S}{\partial x(k)} \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial p(k)} \right\rangle = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\partial S}{\partial p(k)} \right\rangle$$

现在令 $F(x(k), p(k)) = p(k_0)$，那么针对 k_0 时刻.

$$\langle 1 \rangle = -\frac{i}{\hbar} \left\langle p(k_0) \frac{\partial S}{\partial p(k_0)} \right\rangle$$

又由于 $S = \sum_k p(k)(x(k+1) - x(k)) - \Delta t \sum_k H(p(k), x(k))$

$$\therefore \frac{\partial S}{\partial p(k_0)} = x(k_0+1) - x(k_0) - \Delta t \frac{\partial H(p(k_0), x(k_0))}{\partial p(k_0)}$$

当 $\Delta t \to 0$， $\dfrac{\partial S}{\partial p(k_0)} = x(k_0+1) - x(k_0)$

$$\therefore \boxed{\langle i\hbar \rangle = \langle p(k_0) [x(k_0+1) - x(k_0)] \rangle} \quad \text{—— ©}$$

上式是 S 中 px 项的结果. 与具体的 Hamiltonian 无关！

实际上反映的是 x 与 p 的对易关系.

为看清这一点，我作以下计算.

我们来计算

$\langle x' | U(t', t_{k_0}) \hat{x}\hat{p} \cdot U(t_{k_0}, t) | x\rangle$

表示：t时 $|x\rangle$态 在 t_{k_0}时刻被 $\hat{x}\hat{p}$ 作用，然后接着传播到 t' 时刻，处于 $|x'\rangle$ 的几率幅。

仍然将 $t'-t$ 分成 N 分，t_{k_0} 处于第 k_0 分。

$$\int \mathcal{D}x(t) \langle x_N | (1-\frac{i\Delta t}{\hbar}H) | x_{N-1}\rangle \langle x_{N-1} | (1-\frac{i\Delta t H}{\hbar}) | x_{N-2}\rangle \cdots \langle x_{k_0+1} | \hat{x}\hat{p}(1-\frac{i\Delta t}{\hbar}H) | x_{k_0}\rangle$$

$$\times \langle x_{k_0} | (1-\frac{i\Delta t}{\hbar}H) | x_{k_0-1}\rangle \cdots \quad \langle x_1 | (1-\frac{i\Delta t}{\hbar}H) | x_0\rangle$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{其中 } \langle x_{k_0+1} | \hat{x}\hat{p} | P_{k_0}\rangle \langle P_{k_0} | [1-\frac{i\Delta t}{\hbar}H(\hat{x},\hat{p})] | x_{k_0}\rangle \\ \quad = \langle x_{k_0+1} | x_{k_0+1} P_{k_0} | P_{k_0}\rangle \langle P_{k_0} | (1-\frac{i\Delta t}{\hbar}H(x_{k_0}, P_{k_0})) | x_{k_0}\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int \mathcal{D}x(t)\mathcal{D}p(t)\, e^{\frac{iS}{\hbar}} x_{k_0+1} P_{k_0} = \langle x_{k_0+1} P_{k_0}\rangle$$

再计算 $\langle x' | U(t', t_{k_0}) \hat{p}\hat{x}\, U(t_{k_0}, t) | x\rangle$，同样分 N 分。

$$= \langle x_N | \cdots\cdots | x_{k_0+1}\rangle \langle x_{k_0+1} | \hat{p}\hat{x}(1-\frac{i\Delta t}{\hbar}H) | x_{k_0}\rangle \cdots\cdots \langle x_1 | (1-\frac{i\Delta t H}{\hbar}) | x_0\rangle$$

$$= \int \mathcal{D}x(t)\mathcal{D}p(t)\, e^{\frac{iS}{\hbar}} P_{k_0} x_{k_0} = \langle x_{k_0} P_{k_0}\rangle$$

其中 $\langle x_{k_0+1} | \hat{p} | P_{k_0}\rangle \underline{\langle P_{k_0} | \hat{x}(1-\frac{i\Delta t}{\hbar}H) | x_{k_0}\rangle}$ → 这部分处理留作业。

我们发现

$$\langle x' | U(t', t_{k_0})(\hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x})\, | U(t_{k_0}, t) | x\rangle = \langle P(k_0)(x_{k_0+1}-x_{k_0})\rangle$$
$$= \langle i\hbar\rangle$$

这正是上页的(c)式：t_{k_0}时刻算符对易式，等价于计算 $p(k_0)(x_{k_0+1}-x_{k_0})$ 的路径平均，都等于 $\langle i\hbar\rangle$.

§ 传播子是 Green's function.

静电学中电势 $\phi(\vec{x})$ 满足

$$\nabla^2\phi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x}) \quad ①$$

$\rho(\vec{x})$ 是电荷分布密度，决定 $\vec{x}$ 处电势.

$$\rho(\vec{x}) = \int \delta^3(\vec{x}'-\vec{x})\,\rho(\vec{x}')\,d^3x' \quad ②$$

再利用

$$\nabla^2\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -4\pi\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),\quad -4\pi\rho(\vec{x}) = \int \nabla^2\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\rho(\vec{x}')d^3x'$$

定义: $G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ 是 Green's function，因此

$$\phi(\vec{x}) = \int\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\rho(\vec{x}')\,d\vec{x}' = \int G(\vec{x},\vec{x}')\,\rho(\vec{x}')\,d\vec{x}'$$

(以上为自由空间的情形).

$\vec{x}$ 处电势 $\phi(\vec{x})$ 由 $\vec{x}'$ 处电荷密度 $\rho(\vec{x}')$ 乘以 $\vec{x}'$ 处电荷在 $\vec{x}$ 处产生的电势 $G(\vec{x},\vec{x}')$ 叠加得到.

$$\psi(x',t') = \int U(x',t';x,t)\,\psi(x,t)\,dx$$

$U(x',t';x,t)$ 是 t 时刻，局域在 x 处的波函数，在 t' 时刻传播到 x' 处的几率幅.

其在 t 时刻分布在一定空间范围的波函数 $\psi(x,t)$，对于 t' 时刻传播到 x'，得到的波函数 $\psi(x',t')$ 就等于 $U(x',t';x,t)$ 乘以 $\psi(x,t)$，再对全空间 x 积分.