根据Schrödinger方程 我们推导出

$$|\psi(t')\rangle = U(t',t)\,|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iH\cdot(t'-t)}{\hbar}}\,|\psi(t)\rangle$$

设初始时刻 $t=0$.

$$|\psi(t')\rangle = e^{-\frac{iH\cdot t'}{\hbar}}\,|\psi(0)\rangle$$

传播子 $U(t',t) \rightarrow U(t,0)$

$$U(x',t';x,0) = \langle x'|\, e^{-\frac{iH\cdot t'}{\hbar}}\,|x\rangle$$

我们来作个游戏，记 $it=\tau$，或 $t=-i\tau$. 当τ是个纯虚数. 那么

$$\langle x'|\, e^{-\frac{iH\cdot t'}{\hbar}}\,|x\rangle = \langle x'|\, e^{-\frac{H\tau'}{\hbar}}\,|x\rangle$$

$$= \int_{x(0)=x}^{x(\tau')=x'} \mathcal{D}x(\tau)\,\mathcal{D}p(\tau)\; e^{-\frac{S'(\{x(\tau)\},\{p(\tau)\})}{\hbar}} \qquad (1)$$

$-\frac{S'}{\hbar}$ 的推导.（A表达式）

$$\frac{iS}{\hbar} = \frac{i}{\hbar}\int_0^{t'} dt''\left[p(t'')\,\dot{x}(t'') - H(x(t''),p(t''))\right]$$

$$i\int_0^{t'} dt'' \longrightarrow \int_0^{\tau'} d\tau, \qquad \dot{x}(t'') = \frac{x(t''+\Delta t'') - x(t'')}{\Delta t''}$$

$$\rightarrow \frac{x(\tau+\Delta\tau) - x(\tau)}{-i\Delta\tau} = i\dot{x}(\tau)$$

因此：

$$\frac{iS'}{\hbar}=\frac{1}{\hbar}\int_0^{\tau'}d\tau\left[i\,p(\tau)\dot{x}(\tau)-H(x(\tau),p(\tau))\right]$$

$$=-\frac{1}{\hbar}\int_0^{\tau'}d\tau\left[H(x(\tau),p(\tau))-i\,p(\tau)\dot{x}(\tau)\right]$$

即 $S'(\{x(\tau)\},\{p(\tau)\})=\int_0^{\tau'}d\tau\left[H(x(\tau),p(\tau))-i\,p(\tau)\dot{x}(\tau)\right]$

B表达式：

$$\langle x'|e^{-\frac{iH\cdot t'}{\hbar}}|x\rangle=\langle x'|e^{-\frac{H\tau'}{\hbar}}|x\rangle$$

$$=\int_{x(0)=x}^{x(\tau')=x'}\mathcal{D}x(\tau)\,e^{-\frac{1}{\hbar}S'(\{x(\tau)\})}\qquad(2)$$

$$\frac{iS'}{\hbar}=\frac{1}{\hbar}\int_0^{\tau'}d\tau\left[\frac{-m\dot{x}(\tau)^2}{2}-V(x(\tau))\right]=-\frac{1}{\hbar}\int_0^{\tau'}d\tau\left[\frac{m\dot{x}(\tau)^2}{2}+V(x(\tau))\right]$$

这里利用了：$\dot{x}(t'')\longrightarrow i\dot{x}(\tau)$

$\dot{x}(t'')^2\longrightarrow-\dot{x}(\tau)^2$

- $S'(\{x(\tau)\})=\int_0^{\tau'}d\tau\left[\frac{m\dot{x}(\tau)^2}{2}+V(x(\tau))\right]$

被积函数是 $H(x,m\dot{x})$

以上 $\langle x'|e^{-\frac{H\tau'}{\hbar}}|x\rangle$ 在 $x'=x$ 时，对 x 积分.

$$Z=\int dx\langle x|e^{-\frac{H\tau'}{\hbar}}|x\rangle = \mathrm{Tr}\ e^{-\beta H} \quad ⓒ.$$

Z 是平衡系统的配分函数，倒温度 $\beta=\frac{\tau'}{\hbar}$！

- 不是说 τ 是个纯虚数吗？

是的，如果 τ 是纯虚数，我们还是在计算系统的动力学(时间)演化.

但是，如果我们令 τ 是实数，或 t 是纯虚数，路径积分公式可变成 $T=\frac{1}{\beta}=\frac{\hbar}{\tau'}$ 的平衡系统的配分函数.

也可以从 ⓒ 出发，导出 Z 的路径积分公式 (1) 与 (2).
再令 $\tau=it$，得到 $\langle x'|e^{-\frac{iHt'}{\hbar}}|x\rangle$ 的路径积分形式.

这一观察揭示了路径积分应用到统计物理的可能.

附：$\langle x|e^{-\frac{iHt'}{\hbar}}|x\rangle$ 与 $\langle x|e^{-\frac{H\tau'}{\hbar}}|x\rangle$ 的关系差似于

$\cos(x)$ 与 $\cosh(x)$ 的关系.

$$\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \xrightarrow{\text{记 } ix=\tau} \frac{e^{\tau}+e^{-\tau}}{2}=ch(\tau)$$

$$\boxed{\cos(x)=ch(ix)}$$

• 在(1)式中，S含有对 $i\,p(\tau)\dot{x}(\tau)$ 的积分，这一点很重要。因为它才能使 $e^{-S/\hbar}$ 成为复数。这个"相位"就是 Berry phase，后面再说。与此不同，(2)式中没有这个相位。$e^{-S/\hbar}$ 是大于零的实数，是路径 $x(\tau)$ 的统计权重 (weight)

将 $x(\tau)$ 理解为 $d+1$ 维空间的一个"位型"，$e^{-S/\hbar}$ 是这个位型的权重。这样 d 维量子平衡系综就等价于 $d+1$ 维经典统计平衡系综。((1)式中如果相位为0也一样)。

$\dfrac{S(x(\tau))}{\hbar}$ 等效于 $\dfrac{E(x(\tau))}{T}$。

例：一个处于温度 $T=\frac{1}{\beta}$ 环境中的谐振子。$Z=\mathrm{Tr}\,e^{-\beta H}$

其中 $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$，在路径积分表述下，$(\beta=\frac{\tau'}{\hbar})$

$$Z=\int dx\langle x|e^{-\beta H}|x\rangle=\int dx\int_{x(0)=x}^{x(\beta)=x}\mathcal{D}x(\tau)\,e^{-\frac{S}{\hbar}}$$

$$\frac{S}{\hbar}=\int_0^\beta d\tau\left[\frac{m}{2}\dot{x}(\tau)^2+\frac{1}{2}m\omega^2x(\tau)^2\right]\xrightarrow{\text{定义为}}\frac{H_C}{T'}$$

将 $x(\tau)$ 理解为从0到β长的一根弦上，τ处质点偏离平衡位置的位移。$\dot{x}(\tau)=\dfrac{x(\tau+\Delta\tau)-x(\tau)}{\Delta\tau}$ 为相邻两点的位移差。

$T'\frac{m}{2}$ 就是杨氏模量，$\frac{T'}{2}m\omega^2x(\tau)^2$ 是τ处位移在外场中势能。

质点的动能已经被积分掉(或成为常数)。 $+\frac{1}{2}\mu\dot{q}^2$ 的

所以 Z 也是 $\dfrac{H_C}{T'}=\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{\partial q(x)}{\partial x}\right)^2+\dfrac{1}{2}m\omega^2q^2(x)$ 经典系统的配分函数。假设此系统杨氏模量 $Y=1$，则 $T'=\frac{2}{m}$。外场强度为 ω^2。

· 哪条路径对 $\langle x|e^{-\beta H}|x\rangle$ 贡献最大？（τ 为实数）

求解 $\delta S' = 0$.

$$\delta \int_0^\beta \left[\frac{m\dot{x}(\tau)^2}{2} + V(x(\tau))\right] d\tau$$

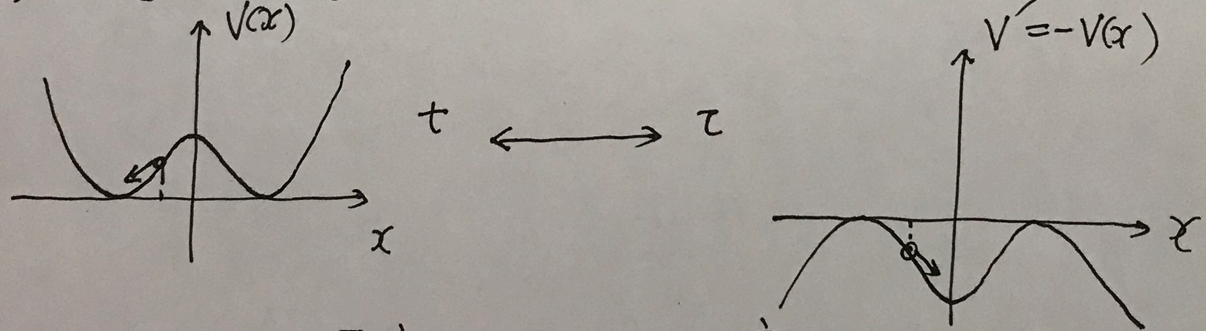
$$= \int_0^\beta \left\{ \delta x \left[-\frac{d}{dt}\frac{\partial(m\dot{x}^2)}{2\partial \dot{x}}\right] + \delta x \frac{\partial V}{\partial x} \right\} d\tau$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial m\dot{x}^2}{2\partial\dot{x}} = 0$$

即 $m\ddot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial[-V(x)]}{\partial x}$

（也可直接利用 $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V$，$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$ 得到）

此方程是 $-V(x)$ 势下粒子的运动方程！



同样的 $H(\hat{x},\hat{p})$ 系统的动力学（时间演化）有一条最重要的路径，由 $m\ddot{x} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ 决定

而系统的平衡系综行为 $(T = \frac{1}{\beta})$ 由出现几率最大的"路径"，满足 $m\ddot{x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} = -\frac{\partial[-V(x)]}{\partial x}$，主导。

其解称为瞬子 (instanton)，也可视为 $H = \frac{p^2}{2m} - V$ 的量子系统对应的（动力学）经典路径。