5 自由粒子的路径积分形式.

t时从x出发到t'时x'处的一维自由粒子，其经典路径为

$$x_c(\tau) = x' + \frac{x-x'}{t-t'}(\tau - t')$$

满足边界条件与匀速运动．如果用这条路径来近似U.

$$U(x't', x, t) = A' e^{\frac{iS_c}{\hbar}}, \quad \mathcal{L}_c = \frac{1}{2} m \dot{x}_c^2$$

$$S_c = \int_{t'}^{t} \mathcal{L}_c \, d\tau = \frac{1}{2} m \frac{(x-x')^2}{t-t'}$$

$$U(x',t';x,t) = A' e^{\frac{i}{2\hbar}\frac{m(x-x')^2}{(-t+t')}}$$

要求 $\lim\limits_{t'\to t} U(x',t';x,t) = \delta(x'-x)$，已知 $\delta(x'-x) = \lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{1}{(\pi\Delta^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x'-x)^2}{\Delta^2}}$

$$\Rightarrow A' = \left[\frac{m}{hi(t'-t)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

现在来计算完整的路径积分： $\left(A = \left[\frac{m}{2\pi\hbar i\Delta\tau}\right]^{\frac{N}{2}}\right)$

$$U(x_N,t_N;x_0,t_0) = \lim_{N\to\infty} A\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{N-1}dx_k \, e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\sum\limits_{k=0}^{N-1}\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{\Delta\tau}}$$

作变量变换： $y_k = \left(\frac{m}{2\hbar\Delta\tau}\right)^{\frac{1}{2}} x_k$

$$U = \lim_{N\to\infty} A\left(\frac{2\hbar\Delta\tau}{m}\right)^{\frac{N-1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{N-1}dy_k \, e^{-\sum\limits_{k=0}^{N-1}\frac{(y_{k+1}-y_k)^2}{i}}$$

注意到: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{i}\left[(y_2-y_1)^2+(y_1-y_0)^2\right]} dy_1 = \left(\frac{i\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-(y_2-y_0)^2/2i}$

再对y_2积分 $\longrightarrow \left[\frac{(i\pi)^2}{3}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-(y_3-y_0)^2/3i}$

最后. $U = \underbrace{A\left(\frac{2\hbar\pi\Delta\tau i}{m}\right)^{\frac{N}{2}}}_{=1} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i N\Delta\tau}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{im(x_N-x_0)^2}{2\hbar N\Delta\tau}}$ 此为自由粒子传播子．和之前一致

$N\Delta\tau = t'-t$，A的另一种推导！

§ 谐振子

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

假设 $x_c(\tau)$ 与 $\dot{x}_c(\tau)$ 是经典径路和它的速度.

令 $x(\tau)=x_c(\tau)+y(\tau)$, $\dot{x}(\tau)=\dot{x}_c(\tau)+\dot{y}(\tau)$ 在 $\tau=t$ 和 $\tau=t'$ 处 $y=0$.

$$\text{那么 } \mathcal{L}=\mathcal{L}(x_c,\dot{x}_c)+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\Big|_{x_c}y+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\Big|_{x_c}\dot{y}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2}\Big|_{x_c}y^2+\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial\dot{x}}\Big|_{x_c}y\dot{y}+\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^2}\Big|_{x_c}\dot{y}^2\right)$$

$\mathcal{L}(x_c,\dot{x}_c)$ 是经典路径的拉氏量 $\longrightarrow$ 最小作用量.

第二部分由于 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\Big|_{x_c}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\Big|_{x_c}=0$ 而消失

$$\int_t^{t'}d\tau\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\Big|_{x_c}y+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\Big|_{x_c}\dot{y}\right)=\int_t^{t'}d\tau\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\Big|_{x_c}y-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\Big|_{x_c}y\right)=0$$

第三部分中 $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}m\omega^2$, $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial\dot{x}}=0$, $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^2}=\frac{1}{2}m$

$$\therefore L=\mathcal{L}(x_c,\dot{x}_c)+\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2-\frac{1}{2}m\omega^2y^2\right)$$

$$U(x',t';x,t)=\int\mathcal{D}x(\tau)\,e^{\frac{i}{\hbar}S}$$

$$S=\int_t^{t'}d\tau\,\mathcal{L}(x_c,\dot{x}_c)+\int_t^{t'}d\tau\,\mathcal{L}(y,\dot{y})$$

$$=S_c+\int_t^{t'}d\tau\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2-\frac{1}{2}m\omega^2y^2\right)$$

于是:

$$U(x',t';x,t)=\int \mathcal{D}x(\tau)\, e^{\frac{i}{\hbar}S_c} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} d\tau\, \mathcal{L}(y,\dot{y})}$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar}S_c} \int_{y(t)=0}^{y(t')=0} \mathcal{D}y(\tau)\, e^{\frac{i}{\hbar}S'(\{y\})}$$

经典路径满足: $-m\omega^2 x = m\ddot{x}$

$$x(t)=x$$

$$x(t')=x'$$

解为 $x_c(\tau)=\frac{1}{\sin[\omega(t'-t)]}\{x\sin[\omega(t'-\tau)]+x'\sin[\omega(\tau-t)]\}$

$$S_c=\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\sin[\omega(t'-t)]}\left[(x^2+x'^2)\cos\omega(t'-t)-2xx'\right]$$

对y的路径积分可理解为围绕经典路径的量子涨落.

由于完全与 x 和 x' 无关，此积分只是 $(t'-t)$ 的函数 记为 $A(t'-t)$

因此. $U(x',t';x,t)=A(t'-t)\, e^{\frac{i}{\hbar}S_c}$

$A(t'-t)$ 可由广义高斯积分求出:

$$A(t'-t)=\left[\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega(t'-t)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

也可以利用 $\int \langle x''|U(t'',t')U(t',t)|x\rangle dx' = \delta(x''-x)$

导出 $|A(t'-t)|^2=\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega(t'-t)}$

我们到虚时表示中看 $U(x',t';x,t)$.

取 $t=0$, $t'=-i\beta\hbar$, $x'=x$

$$U(x,i\beta\hbar;x)=\left[\frac{m\omega}{2\pi\hbar\, sh(\beta\hbar\omega)}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{\hbar}S'}$$

$$S'=\frac{m\omega x^2}{sh(\beta\hbar\omega)}\left[\cosh(\beta\hbar\omega)-1\right]$$

热平衡系综

$$Z=\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}=\int dx\ U(x,-i\beta\hbar;x)$$

$$=\sum_n e^{-\beta E_n}$$

$$Z=\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\, sh(\beta\hbar\omega)}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\ e^{-\frac{x^2}{\frac{\hbar\, sh(\beta\hbar\omega)}{m\omega[ch(\beta\hbar\omega)-1]}}}$$

$$=\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\, sh(\beta\hbar\omega)}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\frac{\hbar\, sh(\beta\hbar\omega)}{m\omega[ch(\beta\hbar\omega)-1]}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2[ch(\beta\hbar\omega)-1]}}$$

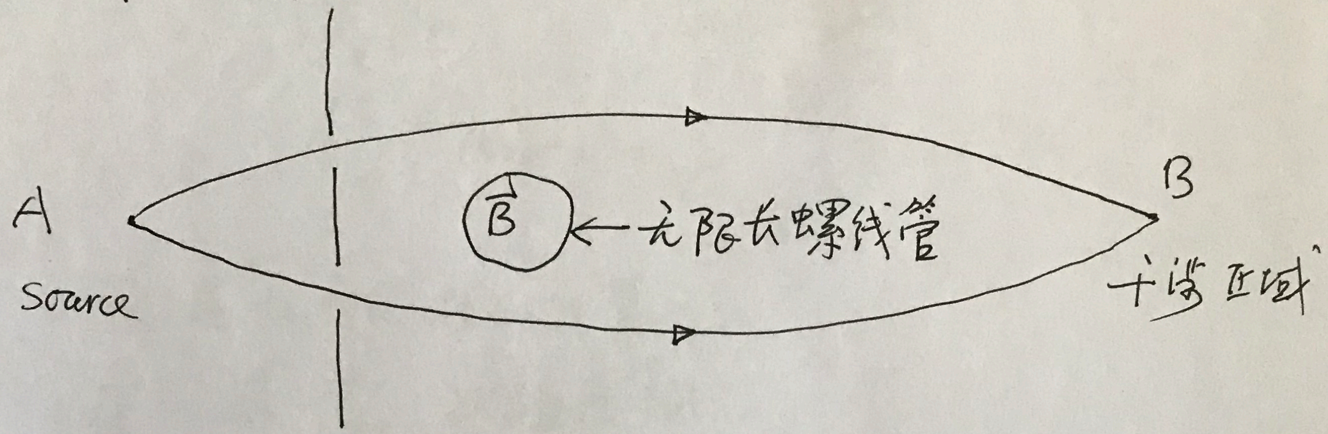
注意 $2(ch\beta\hbar\omega-1)=\left(e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}}-e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}}\right)^2$

$$\therefore Z=e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}\times\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}=e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta\hbar\omega\cdot n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta E_n},\quad \text{with } E_n=(n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

利用路径积分得到了本征谱能量.

§ A-B效应



A: $\vec{x}_0 \equiv \vec{x}$, B: $\vec{x}_N \equiv \vec{x}'$, 无电场 $\varphi = 0$.

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q\vec{A}}{c}\right)^2 = \frac{1}{2m}\vec{\pi}^2 = \frac{\vec{\pi}}{2}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}$$

在无磁场时 ($\vec{B}=0$), $\mathcal{L}^{(0)} = \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - H = \frac{\vec{\pi}}{2}\cdot\dot{\vec{x}} = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2}$

这里 $\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{q\vec{A}}{c}$, 机械动量

加上 $\vec{B}$ 后; $\mathcal{L} = \left(\vec{\pi} + \frac{q\vec{A}}{c}\right)\cdot\dot{\vec{x}} - \frac{\vec{\pi}}{2}\cdot\dot{\vec{x}}$

$$= \mathcal{L}^{(0)} + \frac{q\vec{A}}{c}\cdot\dot{\vec{x}}$$

将出发时刻 t 与到达 B 的时刻 t' 之间时间 $t'-t$ 分成 N 分.

$t' = t_N$, $t = t_0$.

$$U(\vec{x}_N, t_N; \vec{x}_0, t_0) = \int_{x(t)=x}^{x(t')=x'} \mathcal{D}x(t)\, e^{\frac{i}{\hbar}S}$$

$$S = \int_t^{t'} d\tau\, \mathcal{L} = \int_t^{t'} d\tau\left[\mathcal{L}^{(0)} + \frac{q\vec{A}}{c}\cdot\dot{\vec{x}}\right]$$

可写成 $S = \sum_{k=1}^{N} S(k, k-1) = \sum_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} d\tau\left(\mathcal{L}^{(0)} + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\dot{\vec{x}}\right)$

$$S(k,k-1)=\int_{t_{k-1}}^{t_k}dt\,\mathcal{L}^{(0)}+\frac{q}{c}\int_{t_{k-1}}^{t_k}dt\,\frac{dx}{dt}\cdot\vec{A}$$

$$=S^{(0)}(k,k-1)+\frac{q}{c}\int_{\vec{x}_{k-1}}^{\vec{x}_k}\vec{A}\cdot d\vec{l}$$

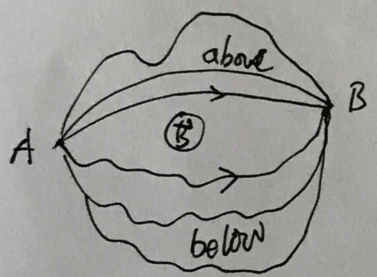
$\vec{x}_k$ 是 t_k 时刻粒子的位置.

$d\vec{l}=\vec{x}_k-\vec{x}_{k-1}$ 为路径微元

$$e^{\frac{i}{\hbar}S}=e^{\frac{i}{\hbar}S^{(0)}}\cdot e^{\frac{iq}{\hbar c}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_N}\vec{A}\cdot d\vec{l}}$$

电动力学告诉我们 $\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}=\Phi_B$ ← $\vec{l}$ 包围的磁通.

因此 $$U(\vec{x}_N,t_N;\vec{x}_0,t_0)=\int_{above}\mathcal{D}x(t)\,e^{\frac{iS^{(0)}}{\hbar}}\cdot e^{\frac{iq}{\hbar c}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_N}\vec{A}\cdot d\vec{l}}+\int_{below}\mathcal{D}x(t)\,e^{\frac{iS^{(0)}}{\hbar}}\cdot e^{\frac{iq}{\hbar c}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_N}\vec{A}\cdot d\vec{l}}$$



★ 所有 above 路径 $\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_N}\vec{A}\cdot d\vec{l}$ 相等! ∵因为任意两条之间不包围磁通

同样, 所有 below 的积分也相同!

与路径无关

令 $\int_{above}\mathcal{D}x(t)\,e^{\frac{iS^{(0)}}{\hbar}}=①$, $\int_{below}\mathcal{D}x(t)\,e^{\frac{iS^{(0)}}{\hbar}}=②$.

在 $\vec{x}_N$ 处发现粒子的几率 $=\left|①\,e^{\frac{iq}{\hbar c}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_N}\vec{A}\cdot d\vec{l}}+②\times e^{\frac{iq}{\hbar c}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_N}\vec{A}\cdot d\vec{l}}\right|^2$

↓

$$P(x_N,t_N)=|①|^2+|②|^2+2\mathrm{Re}\left[①\times②^*\,e^{\frac{iq}{\hbar c}\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}}\right]$$

由于 $\oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \Phi_B$

$$P(x_N, t_N) = |①|^2 + |②|^2 + 2\mathrm{Re}\left[①\times②^* \, e^{\frac{i g \Phi_B}{\hbar c}}\right]$$

$$= |①|^2 + |②|^2 + 2\,|①\times②^*| \cos\left(\frac{g\Phi_B}{\hbar c} + \varphi\right)$$

其中 $①②^* = |①\times②^*|\, e^{i\varphi}$.

这表明，当我们调节磁通量 Φ_B，会在B处观察到类余弦曲线的强度变化！其周期由 $\frac{hc}{g}$ 决定！（$\frac{hc}{g}$ 是磁通量子）

• 注意：Φ_B 仍是最终决定观测效应的物理量，不是 $\vec{A}$

ref: phys. Rev. Lett 48, 1443 (1982).