第十五讲

• Berry phase 只对封闭路径有意义 (well defined)

$|\vec{n}\rangle$ 可以选任意相位，对应物理态不变，(gauge 自由)

$$|\vec{n}(t)\rangle \longrightarrow |\vec{n}(t)\rangle e^{i\phi(t)}$$

$$\gamma(t') = i\int_0^{t'} dt\, \langle \vec{n}(t)|\dot{\vec{n}}(t)\rangle \longrightarrow \gamma(t') + i\int_0^{t'} i\dot{\phi}(t)\, dt$$

$$= \gamma(t') + \phi(0) - \phi(t')$$

不同的相位选取，得到不同的 $\gamma(t')$！

由于 $|n(t)\rangle$ 与 $|n(t+\Delta t)\rangle$ 几乎"平行" (Δt 内变化不大).

$\therefore\ |\langle n(t)|n(t+\Delta t)\rangle| \approx 1$, $\langle n(t)|n(t+\Delta t)\rangle \approx e^{i\Delta\phi}$

每一小步，如果我们选取一个规范，使得 $\Delta\phi = 0$，那么

$$\gamma(t') = i\int_0^{t'} dt\, \frac{\langle n(t)|n(t+\Delta t)\rangle - \langle n(t)|n(t)\rangle}{\Delta t} = 0$$

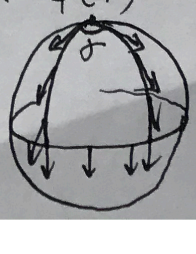
• Berry phase 消失了！← 通过定义"common phase".

然而对于封闭路径 → $|\vec{n}(T)\rangle$ 与 $|\vec{n}(0)\rangle$ 表示同一个自旋状态. 当我们选取变换 $|\vec{n}(t)\rangle \to |\vec{n}(t)\rangle e^{i\phi(t)}$ 后，

由于 $|\vec{n}(0)\rangle \to |\vec{n}(0)\rangle e^{i\phi(0)}$ 与 $|\vec{n}(T)\rangle \to |\vec{n}(T)\rangle e^{i\phi(T)}$

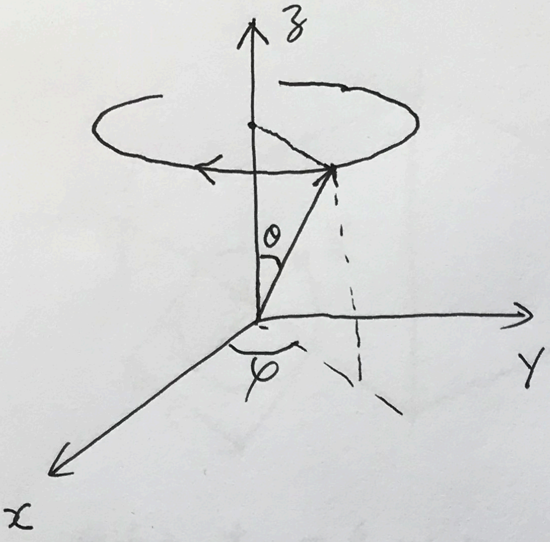
必须满足 $e^{i\phi(0)} = e^{i\phi(T)}$，← 同一个物理态不能有两个相因子，$\therefore\ \phi(T) = \phi(0) + n\cdot 2\pi$，$n$ 整数！

$\gamma(T)$ 不可消去！



类似于在球面上"平行"移动一个矢量

我们再来复习一个有趣的问题：Larmor pression(进动)



固定磁场 $\vec{B} = B\hat{z}$,

中子磁矩 $\vec{\mu} = g\mu_0\vec{\sigma}$

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z$$

$$\mu_0 = \frac{g_n e\hbar}{2mc}, \quad \mu_0 B = \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\omega = \frac{g_n eB}{mc}$$

初态 $|t=0\rangle = |\vec{n}(0)\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \leftarrow \varphi=0.$

$$t=t': \; |t'\rangle = e^{-\frac{iHt'}{\hbar}}|\vec{n}(0)\rangle$$

$$= e^{-\frac{iHt'}{\hbar}}\left(\cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle\right)$$

$$= \cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\omega t'}{2}}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\omega t'}{2}}|-\rangle$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\omega t'}{2}}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\omega t'}{2}}\end{pmatrix}$$

计算 $\vec{\sigma}$ 的期望值 $\langle t'|\vec{\sigma}|t'\rangle = (\langle t'|\sigma_x|t'\rangle, \langle t'|\sigma_y|t'\rangle, \langle t'|\sigma_z|t'\rangle)$

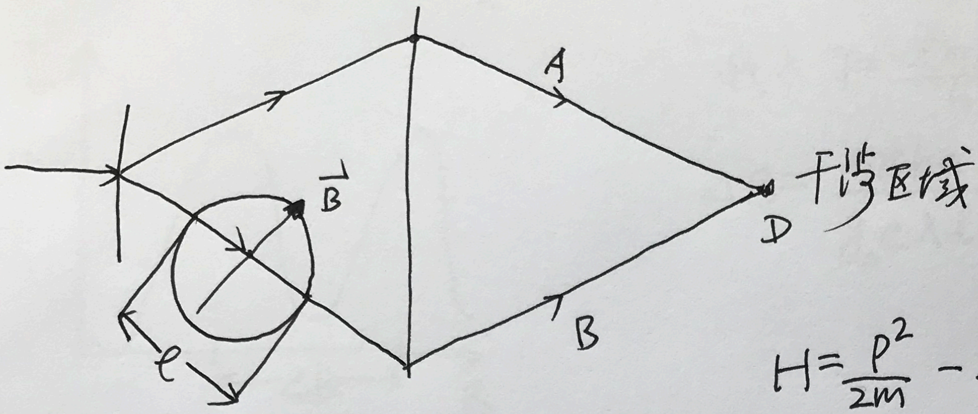
注意到：$|t'\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\varphi(t')}{2}}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\varphi(t')}{2}}\end{pmatrix} = |\vec{n}(\theta,\varphi)\rangle$, $\quad \varphi(t') = -\omega t'$

$\therefore \langle t'|\vec{\sigma}|t'\rangle = \vec{n}(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\omega t', \sin\theta\sin(-\omega t'), \cos\theta)$

这就是自旋角动量的 Larmor pression. 周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$

但是 $|t'\rangle$ 的周期为 $T' = \frac{4\pi}{\omega}$!

这个效应可以通过下面的实验观测到.



$$H=\frac{p^2}{2m}-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

一个中子走两条路径，到达D点的时候波函数分别为

$$\xi_A=\begin{pmatrix}c_1^A\\ c_2^A\end{pmatrix} \quad 与\ \xi_B=\begin{pmatrix}c_1^B\\ c_2^B\end{pmatrix},$$

设没有加磁场 $\vec{B}$ 时，$\xi_B=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$，$\xi_A$ 与 ξ_B 有相位差 δ

加上 $\vec{B}$ ~~磁~~之后，$\xi_B=\begin{pmatrix}c_1 e^{\frac{i\omega T}{2}}\\ c_2 e^{-\frac{i\omega T}{2}}\end{pmatrix}$，$\xi_A=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}e^{i\delta}$

$$\omega=\frac{g_n eB}{mc},\quad T=\frac{l}{v},\quad mv=\hbar\cdot\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \Rightarrow T=\frac{lm\lambda}{h}$$

在D点处于 $|+\rangle$ 的波函数干涉.

$$I_+=\left|c_1 e^{i\delta}+c_1 e^{\frac{i\omega T}{2}}\right|^2=|c_1|^2\left(1+\cos\left(\frac{\omega T}{2}-\delta\right)\right)$$

处于 $|-\rangle$ 的波函数也干涉.

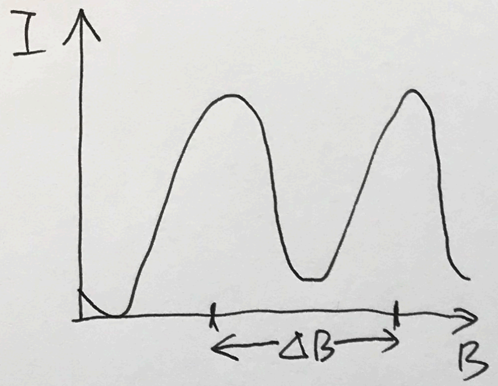
$$I_-=\left|c_2 e^{i\delta}+c_2 e^{-\frac{i\omega T}{2}}\right|^2=|c_2|^2\left(1+\cos\left(-\frac{\omega T}{2}-\delta\right)\right)$$

设 $|c_1|^2=|c_2|^2$,

$$I=I_+ + I_- = 2|c_1|^2\left(1+\cos\frac{\omega T}{2}\cos\delta\right)$$

调节B的强度，可改变ω。

当 $\frac{g_n e \Delta B}{mc} \times \frac{T}{2} = 2\pi$ 时，干涉强度完成一个周期。



代入 $T = \frac{l m \lambda}{h}$

$$\Delta B = \frac{4\pi h c}{g_n e \lambda l}$$

★ 以上推导中 $T = \frac{4\pi}{\omega}$ 态矢完成一个周期！

然而，能否通过gauge变换消灭这个效应？ 当然不能，这是实

$$|t'\rangle \longrightarrow |t'\rangle \cdot e^{\frac{i\omega t'}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} e^{i\omega t'} |+\rangle + \sin\frac{\theta}{2} |-\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi(t')} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \varphi(t') = -\omega t'$$

$|t'\rangle$的周期变成了 $\tilde{T} = \frac{2\pi}{\omega}$ ！

再来看实验：$\xi_B = \begin{pmatrix} c_1 e^{i\omega T} \\ c_2 \end{pmatrix}$ ，$\xi_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{i\delta + \frac{i\omega T}{2}}$

因为 $|t'\rangle \to |t'\rangle e^{\frac{i\omega t'}{2}}$ 的变换是"整体的"，对所有路径！

· 干涉取决于相位差，所以不影响实验结果！

$|t'\rangle \to |t'\rangle e^{\frac{i\omega t'}{2}}$ 相当于 $H \to H + \frac{\hbar\omega}{2}$ 的效果。

<u>不改变物理</u>