第十七讲

另一个有趣的事实：即使 $H=0$，仍然可以给出一条路径

& Berry phase:　　$U=e^{-\beta H}=\mathbb{1}$

$$\langle\vec n(\beta)|U(\beta,0)|\vec n(0)\rangle=\prod_{i=1}^{N-1}\int\frac{d\vec n}{2\pi}\langle\vec n(\beta)|\vec n(\tau_{N-1})\rangle\langle\vec n(\tau_{N-1})|\cdots\langle\vec n(\tau_1)|\vec n(0)\rangle$$

$$=\int D\vec n\, e^{-S}$$

$$S=\frac{i\Omega}{2}.$$

• 推导运动方程：

~~考虑~~ 实时. $\langle\vec n(t)|e^{-iHt}|\vec n(0)\rangle$，$\vec n(t)=\vec n(0)$ 封闭.

$$=\int D\vec n\, e^{+iS}$$

$$iS=-iI\Omega-\int_0^\beta H(I\vec n)d\tau$$

$$S=-I\Omega+i\int_0^\beta H(I\vec n)d\tau=-I\Omega-\int_0^t H(I\vec n)dt'$$

最小作用量原理给出经典路径 $\longrightarrow$ 运动方程.

$$I\delta\Omega=I\int_0^\beta d(it')\,\delta[\dot\varphi(1-\cos\theta)]$$

$$=iI\int_0^t dt'\,\delta\left[\frac{d\varphi}{idt'}(1-\cos\theta)\right]=I\int_0^t dt'\left[\frac{d\varphi}{dt'}\delta\theta\sin\theta-\left(\frac{d\delta\varphi}{dt'}\right)\cos\theta\right]$$

$$=I\int_0^t dt'\left[\frac{d\varphi}{dt'}\delta\theta-\frac{d\theta}{dt'}\delta\varphi\right]\sin\theta$$ ← 第2项分部积分

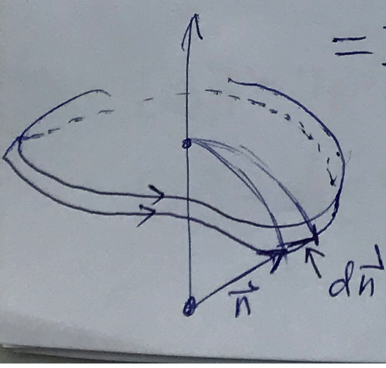
$$=I\int_0^t dt'\,\delta\vec n\cdot\left(\frac{d\vec n}{dt'}\times\vec n\right)$$

$\delta\vec n$ 的 $\hat e_\theta$ 分量 $=\delta\theta$

$\delta\vec n$ 的 $\hat e_\varphi$ 分量 $=\sin\theta\,\delta\varphi$

$\dot\varphi\sin\theta$ 是 $\frac{d\vec n}{dt'}\times\vec n$ 的 $\hat e_\theta$ 分量

$-\dot\theta$ 是 $\frac{d\vec n}{dt'}\times\vec n$ 的 $\hat e_\varphi$ 分量.

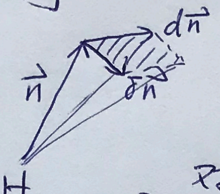


$\delta\vec n$ 是两条"相邻"路径

t时刻$\vec n$的变化 $\Rightarrow -\vec n\cdot\left(\frac{d\vec n}{dt'}\times\delta\vec n\right)$

证: $I\delta\Omega = -I\int_0^t dt\ \vec{n}\cdot\left(\frac{d\vec{n}}{dt'}\times\delta\vec{n}\right)$　　矢量公式.

$\frac{d\vec{n}}{\cancel{dt}}\times\delta\vec{n}$ 给出的有向面积，投影到 $\vec{n}$ 方向，积分后是两条路径立体角之差.



$-\delta\left[\int_0^t H(I\vec{n})dt'\right] = -\int_0^t dt'\ \delta\vec{n}\cdot\frac{\partial H}{\partial\vec{n}}$ $\longrightarrow$ 对 $H = -\vec{B}\cdot\vec{S}$ 记之 $\frac{\partial H}{\partial\vec{n}} = -\vec{B}I$

$= I\int_0^t dt'\ \delta\vec{n}\cdot\vec{B}$　　(这里已设 $\vec{S} = \vec{\mu}$).

于是 $\delta S' = 0 \Rightarrow I\left(\frac{d\vec{n}}{dt}\times\vec{n}\right) = +\vec{B}I$

$$\vec{n}\times I\left(\frac{d\vec{n}}{dt}\times\vec{n}\right) = +\vec{n}\times\vec{B}I$$

注意到 $\vec{n}\cdot d\vec{n} = 0$,　$I\frac{d\vec{n}}{dt} = +I\vec{n}\times\vec{B}$

此方程就是 $\boxed{\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\mu}\times\vec{B}}$ 经典力矩方程.

给出自旋角动量绕 $\vec{B}$ 的进动.

我们回到最初的问题：一个有磁矩的自旋在磁场中，环境温度为 $T = \frac{1}{\beta}$. 密度算符 $\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z}$, $H = -\mu_0 B\sigma_z$. 定义 $\mu_0 B = \frac{\hbar\omega}{2}$

$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}$,　取 $\vec{B}$ 的方向为 z 轴. $H = -\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z$.

在 S_z 表象计算 $Z = \langle\uparrow|e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}\sigma_z}|\uparrow\rangle + \langle\downarrow|e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}\sigma_z}|\downarrow\rangle$

$= \mathrm{ch}(x)$,　$x = \frac{\hbar\omega\beta}{2} = \frac{\hbar\omega}{2T} = \frac{\mu_0 B}{T}$

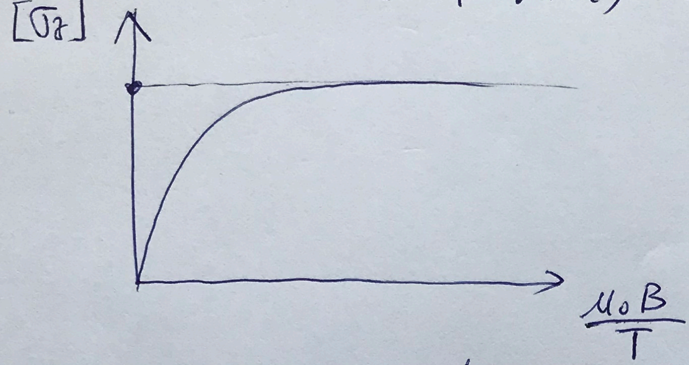
$[\sigma_z] = \mathrm{Tr}(\rho\sigma_z) = \frac{1}{Z}\left[\langle\uparrow|e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}\sigma_z}|\uparrow\rangle - \langle\downarrow|e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}\sigma_z}|\downarrow\rangle\right] = \mathrm{th}(x)$

$[\sigma_x] = \frac{1}{Z}\left[\langle\uparrow|e^{x}\sigma_x|\uparrow\rangle + \langle\downarrow|e^{x}\sigma_x|\downarrow\rangle\right] = 0$.

实际上 $[\sigma_z] = \dfrac{\partial \ln Z}{\beta \mu_0 \partial B}$

还可以算出 $(\Delta\sigma_z)^2 = [\sigma_z^2] - [\sigma_z]^2$

$$= 1 - \text{th}^2(x) \sim \frac{4}{e^{2x}}$$



从相干态路径积分看，忽略 Berry phase 的话，它可看成一条链上的经典自旋（$\vec{S}=I\vec{n}$）在外场中的配分函数。但是 β 不是"倒温度"了，而是链的长度，倒是 I 可看成"倒温度"！

杀鸡用牛刀？非也。处理多体问题非常有用！$H=J\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$

Haldane 用这套方法，把描述自旋相互作用的 Heicenberg model 映射成"经典"模型，加 Berry phase 导致的 Topological 项，解释了 $S=\frac{1}{2}$ 与 $S=1$ 的自旋链的不同 $\rightarrow$ Haldane Gap.

获得 Nobel 奖.