第十九讲

§(续) 量子力学中的无穷小转动

• 空间转动(真实空间).

类似于前面讲到的空间与时间平移，这种转动也应该导致态矢的"转动"：$|\alpha\rangle \to |\alpha\rangle_R$

设 R 为 3×3 正交矩阵，$\vec{V}' = R\vec{V}$. 与此对应

$$|\alpha\rangle_R = \mathcal{D}(R)|\alpha\rangle$$

* $\mathcal{D}(R)$ 描述一个 Hilbert space 中的转动：${}_R\langle\alpha|\alpha\rangle_R = 1$

$$\mathcal{D}^+(R)\cdot\mathcal{D}(R) = 1.$$

* $\mathcal{D}(R)$ 的维数 $N=?$ 这取决于你研究的物理系统.

比如一个自旋 $S=\frac{1}{2}$ 的系统，Hilbert space 维数是 2.

$\mathcal{D}(R)$ 是个 2×2 矩阵.

* 我们从无穷小~~转~~旋开始.

类似于无穷小平移 $T(\varepsilon) = 1 - \frac{i\vec{p}\cdot\vec{\varepsilon}}{\hbar}$，无穷小时移 $U(\varepsilon) = 1 - \frac{iH}{\hbar}\varepsilon$

定义了动量与能量算符(分别是平移的生成元). 我们定义

$\boxed{\text{角动量 是 旋转操作的生成元}}$

考虑个绕 k 轴的无穷小转动 $R_{\hat{k}}(d\phi)$，其对应的 $\mathcal{D}(R_{\hat{k}}(d\phi))$

可以写成：$\mathcal{D}(R_k(d\phi)) = 1 - i\frac{J_k}{\hbar}\cdot d\phi$

其中 J_k 是厄密的：$J_k = J_k^+$

跟平移与时移一样，这保证了① $\mathcal{D}(R_k(d\phi)) = \mathcal{D}^+(R_k(d\phi))$

② 当 $d\phi\to0$，$\mathcal{D}(R_k(d\phi)) \to \mathbb{1}$

引入简写 $\mathcal{D}(R_k(d\phi)) \equiv \mathcal{D}(k, d\phi) \equiv \mathcal{D}_k(d\phi)$

更一般地，我们有

$$\mathcal{D}(\hat{n}, d\phi) = 1 - i\left(\frac{\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}\right)d\phi$$

对应一个绕 $\hat{n}$ 方向的无穷小转动 $d\phi$. $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ 为角动量!

- 我们这种定义角动量方式，不同于定义 $\vec{J} = \vec{r}\times\vec{p}$，是一种更本质的定义.

一个有限的转动可由绕同一轴的无穷小转动重复来实现

$$\mathcal{D}_z(\phi) = \lim_{N\to\infty}\left[1 - i\frac{J_z}{\hbar}\left(\frac{\phi}{N}\right)\right]^N \leftarrow \mathcal{D}_z\left(\frac{\phi}{N}\right)\cdots\cdots\mathcal{D}_z\left(\frac{\phi}{N}\right)$$

$$= e^{-i\frac{J_z}{\hbar}\phi} = 1 - i\frac{J_z\phi}{\hbar} + \frac{1}{2!}\left(\frac{-iJ_z\phi}{\hbar}\right)^2 + \cdots\cdots$$

为获得角动量的对易关系，我们需要假设 $\mathcal{D}(R)$ 与 R 有一样的群(group)性质

① . Identity (单位元) $R\cdot\mathbb{1} = R \Rightarrow \mathcal{D}(R)\cdot\mathbb{1} = \mathcal{D}(R)$

② closure (封闭性) $R_1\cdot R_2 = R_3 \Rightarrow \mathcal{D}(R_1)\cdot\mathcal{D}(R_2) = \mathcal{D}(R_3)$

③ Inverses (逆) $RR^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{D}(R)\mathcal{D}^{-1}(R) = \mathbb{1}$

$R^{-1}R = \mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{D}^{-1}(R)\mathcal{D}(R) = \mathbb{1}$

④ Associativity (结合律)

$$R_1\cdot(R_2\cdot R_3) = (R_1\cdot R_2)\cdot R_3 \Rightarrow \mathcal{D}(R_1)\cdot(\mathcal{D}(R_2)\cdot\mathcal{D}(R_3)) = [\mathcal{D}(R_1)\mathcal{D}(R_2)]\mathcal{D}(R_3)$$

$$= R_1\cdot R_2\cdot R_3 \qquad = \mathcal{D}(R_1)\cdot\mathcal{D}(R_2)\cdot\mathcal{D}(R_3)$$

下面利用之前得到的 $[R_x(\varepsilon), R_y(\varepsilon)] = R_z(\varepsilon^2) - 1$

来推导角动量对易关系.

$$R_x(\varepsilon) \longrightarrow \mathcal{D}_x(\varepsilon) = 1 - i\frac{J_x\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}$$

$$R_y(\varepsilon) \longrightarrow \mathcal{D}_y(\varepsilon) = 1 - i\frac{J_y\varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2\varepsilon^2}{2\hbar^2}$$

利用 R 与 $\mathcal{D}(R)$ 的对应.

$$[\mathcal{D}_x(\varepsilon), \mathcal{D}_y(\varepsilon)] = \mathcal{D}_z(\varepsilon^2) - 1 = \frac{-iJ_z\varepsilon^2}{\hbar} \quad (保留 \varepsilon^2)$$

具体计算表明，ε 的 0 次与 1 次幂项抵消.

ε^2 项：
$$\frac{J_x J_y \varepsilon^2}{\hbar^2} - \frac{J_y J_x \varepsilon^2}{\hbar^2} = \frac{iJ_z\varepsilon^2}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \boxed{[J_x, J_y] = i\hbar J_z}$$

推广：$[J_i, J_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k$ 角动量的尽本对易式!

- 这些无穷小生成元不对易，它们生成"的群称作非阿贝尔 (Non-Abelian)

为得到这些无比重要的对易式，我们只用了两条：

1. J_k 是绕 k 轴转动的生成元
2. 绕不同轴的转动不对易.

§ 自旋½系统

满足 $[J_x, J_y]=i\hbar J_z$ 的系统 其最小维度是 $N=2$.

我们知道 $S_x=\frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle+|)$

$S_y=i\frac{\hbar}{2}(-|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle+|)$

$S_z=\frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|)$

这些表达式是利用对易关系获得的.

来考虑绕z轴的转动 ϕ (有限)

$|\alpha\rangle_R=\mathcal{D}_z(\phi)|\alpha\rangle$, 其中 $\mathcal{D}_z(\phi)=e^{-\frac{iS_z\phi}{\hbar}}$

看看转动的效果: 计算 ${}_R\langle\alpha|S_x|\alpha\rangle_R$

$${}_R\langle\alpha|S_x|\alpha\rangle_R=\langle\alpha|\mathcal{D}_z^+(\phi)\,S_x\,\mathcal{D}_z(\phi)|\alpha\rangle$$

$$=\langle S_x\rangle\cos\phi-\langle S_y\rangle\sin\phi$$

类似地, ${}_R\langle\alpha|S_y|\alpha\rangle_R=\langle S_y\rangle\cos\phi+\langle S_x\rangle\sin\phi$

${}_R\langle\alpha|S_z|\alpha\rangle_R=\langle S_z\rangle$

这里 $\langle S_x\rangle\equiv\langle\alpha|S_x|\alpha\rangle$. 这就是我们熟悉的公式.

$$\begin{pmatrix}\langle S_x\rangle_R\\ \langle S_y\rangle_R\\ \langle S_z\rangle_R\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle S_x\rangle\\ \langle S_y\rangle\\ \langle S_z\rangle\end{pmatrix}$$

缩写: $\langle J_k\rangle_R=\sum_l R_{kl}\langle J_l\rangle$ ← 推广到一般N的系统.

推导 1. $e^{\frac{iS_z\phi}{\hbar}}\,S_x\,e^{-\frac{iS_z\phi}{\hbar}}=\frac{\hbar}{2}e^{\frac{iS_z\phi}{\hbar}}(|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle+|)e^{-\frac{iS_z\hbar}{\hbar}}$

$$=\frac{\hbar}{2}\left(e^{\frac{i\phi}{2}}|+\rangle\langle-|e^{\frac{i\phi}{2}}+e^{-\frac{i\phi}{2}}|-\rangle\langle+|e^{\frac{-i\phi}{2}}\right)$$

$$=\frac{\hbar}{2}\,(|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle+|)\cos\phi+i(|+\rangle\langle-|-|-\rangle\langle+|)\sin\phi$$

$$=S_x\cos\phi-S_y\sin\phi$$

推导2：只利用对易关系！ 利用：

$$e^{iG\lambda}Ae^{-iG\lambda} = A + i\lambda[G,A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}[G,[G,A]] + \cdots + \frac{(i\lambda)^n}{n!}[G,\cdots\cdots[G,A]\cdots]$$

此为 Baker-Hausdorff lemma. $G=G^\dagger$，λ为参数.

$$e^{\frac{iS_z\phi}{\hbar}} S_x e^{-\frac{iS_z\phi}{\hbar}} = S_x + \left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)[S_z,S_x]+\cdots\cdots$$

$$= S_x - \phi S_y - \frac{\phi^2}{2!}S_x + \frac{\phi^3}{3!}S_y+\cdots$$

$$= S_x\cos\phi - S_y\sin\phi$$

以上我们看到了态矢空间转动的效果：把 $\vec{S}$ 的期望值在3维空间对应转动！

下面看态矢自己：假定 $|\alpha\rangle = |+\rangle\langle+|\alpha\rangle + |-\rangle\langle-|\alpha\rangle$

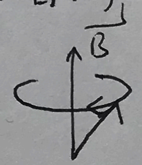
$$e^{-\frac{iS_z\phi}{\hbar}}|\alpha\rangle = e^{-\frac{i\phi}{2}}|+\rangle\langle+|\alpha\rangle + e^{\frac{i\phi}{2}}|-\rangle\langle-|\alpha\rangle$$

当 $\phi=2\pi$，即系统被旋转一圈 $\langle\vec{S}\rangle_R = \langle\vec{S}\rangle$,

$$|\alpha\rangle_{R_z(2\pi)} = -|\alpha\rangle.$$

$\phi=4\pi$: $|\alpha\rangle_{R_z(4\pi)} = |\alpha\rangle$.

我们之前研究过，通过自旋进动实验加干涉，可以看到这个物理效应.



进动： $H=\omega S_z$， $\omega = \frac{eB}{m_e c}$， B指向z.

$$U(t,0)=e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = e^{-i\frac{S_z\omega t}{\hbar}} = \mathcal{D}_z(\phi=\omega t)$$

- 时间演化就是一个转动：绕z轴 $\phi=\omega t$！
- $\langle\vec{S}\rangle_R = R\langle\vec{S}\rangle$， $R=R_z(\omega t)$ 周期 $\frac{2\pi}{\omega}$
- $|\alpha(t)\rangle = U(t,0)|\alpha(0)\rangle = \mathcal{D}_z(\omega t)|\alpha(0)\rangle$， 周期 $\frac{4\pi}{\omega}$

实验中干涉