第20讲.

上节课我们利用 R 与 $\mathcal{D}(R)$ 的对应，得到了角动量的对易关系.

对于 $S=\frac{1}{2}$ 的自旋系统，$\mathcal{D}(R_{\vec{n}}(\phi))=e^{-i\frac{\vec{S}\cdot\vec{n}}{\hbar}\phi}$ 可利用Pauli算符化简：$\mathcal{D}(R_{\vec{n}}(\phi))=e^{-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{n}}{2}\phi}$，再利用.

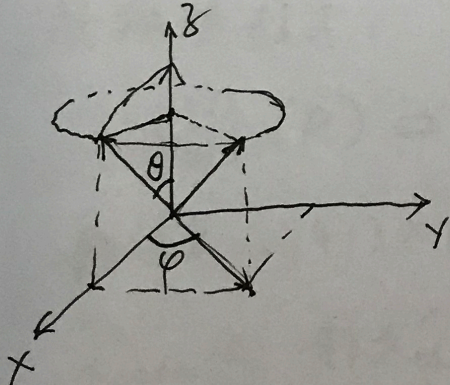
$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})^n=\begin{cases}1 & \text{当}n\text{是 even}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{n}, & \text{当}n\text{是 odd}.\end{cases}$$

那么容易发现：$\mathcal{D}(R_{\vec{n}}(\phi))=\mathbb{1}\cos\frac{\phi}{2}-i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\sin\frac{\phi}{2}$

- 利用这个公式我们可以方便地写出 $|\vec{n}\rangle$，而不用去求解本征方程 $(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})|\vec{n}\rangle=|\vec{n}\rangle$

1. 首先我们知道对 $|+\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\langle\vec{\sigma}\rangle=(0,0,1)^T$

将 $\langle\vec{\sigma}\rangle$ 绕 Y 轴转 θ，得 $\langle\vec{\sigma}'\rangle=(\sin\theta,0,\cos\theta)^T$



对应的态矢 $|+\rangle_R=(\cos\frac{\theta}{2}-i\sigma_y\sin\frac{\theta}{2})|+\rangle$

2、再绕 z 轴转 ϕ.

$$\langle\vec{\sigma}''\rangle=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)^T$$

对应的态矢就是 $|\vec{n}\rangle$

$$|\vec{n}\rangle=(\cos\frac{\varphi}{2}-i\sigma_z\sin\frac{\varphi}{2})(\cos\frac{\theta}{2}-i\sigma_y\sin\frac{\theta}{2})|+\rangle=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\varphi}{2}}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\varphi}{2}}\end{pmatrix}$$

- 代入具体的 σ_z 和 σ_y,σ_x，我们可以写出 $\mathcal{D}(R_{\vec{n}}(\phi))$ 的矩阵.

$$\mathcal{D}_{\vec{n}}(\phi)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\phi}{2}-in_z\sin\frac{\phi}{2}, & (-in_x-n_y)\sin\frac{\phi}{2}\\ (-in_x+n_y)\sin\frac{\phi}{2}, & \cos\frac{\phi}{2}+in_z\sin\frac{\phi}{2}\end{pmatrix}$$

回头来，我们再看 $R_{\vec{n}}(\phi)$。在3维空间，给定坐标系，R是3×3的实矩阵。由于 $R^TR=1$，独立的参数有3个。（对应2个方向参数一个转动角）。所有这些矩阵构成一个群，称为SO(3)群。

S → special，∵ $|R|=1$. O → orthogonal.

R对应的2维自旋态矢空间转动 $D(R)$，是2×2复矩阵。但独立的参数仍是3个实数：n_x, n_y, ϕ。所有的这些矩阵构成一个群，称为SU(2)。U → Unitary.

• SO(3)与SU(2)群都描述转动：但是 $R_{\vec{n}}(2\pi)$ 与 $R_{\vec{n}}(4\pi)$ 是同一个矩阵：单位矩阵，而对应的 $U(\vec{n},2\pi)=-1$，$U(\vec{n},4\pi)=1$. 可见这是个2对一的映射，可称局部同构. Locally isomorphic

• 对于角动量量子数为j的系统，$R_{\vec{n}}(\phi)$ 对应 $D(R_{\vec{n}}(\phi))$ 也可写成矩阵形式：

$$D^{(j)}_{m'm}(R) = \langle j,m'|\, e^{-i\frac{\vec{J}\cdot\vec{n}}{\hbar}\phi}\, |j,m\rangle$$

这是 $(2j+1)\times(2j+1)$ 维的矩阵. 矩阵元称为Wigner函数.

$D^{(j)}_{m'm}(R)$ 称为 $D(R)$ 的2j+1维不可约表示 (irreducible representation). 反过来，对于不确定j的系统. $D(R)$ 是

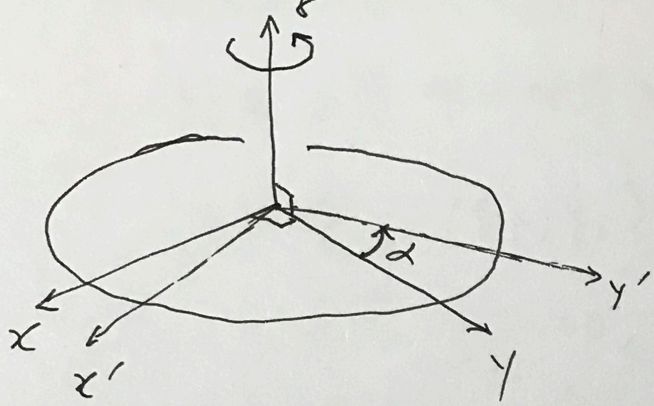
$$\begin{pmatrix} \boxed{2\times2} & & & \\ & \boxed{3\times3} & & \\ & & \boxed{4\times4} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

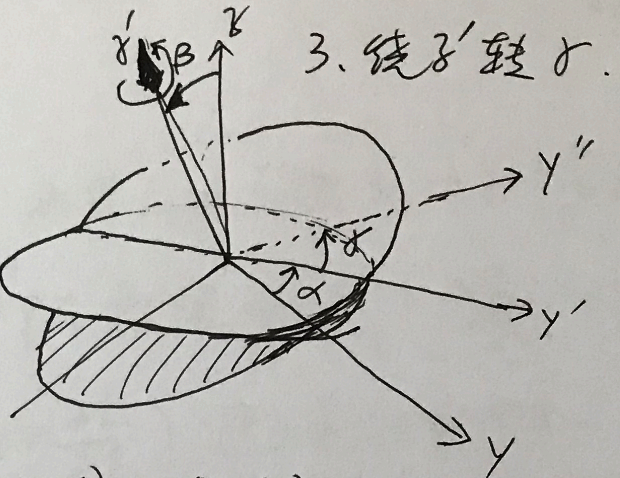
称可约表示.

• 利用欧拉转动，我们可进一步看清这些表示

考虑刚体的转动。 1、绕z转α。 2、绕y′转β

3、绕z′转γ。





这个转动可写成：$R(\alpha,\beta,\gamma)=R_{z'}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha)$.

由于 $R_{y'}(\beta)=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha)$.

（可由左右两种操作的后果 y' 方向一样，z' 与 z 的夹角 β 一致看出。或者说，两种操作得到的 z' 有一样的 α,β）.

类似地，$R_{z'}(\gamma)=R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}^{-1}(\beta)$

我们推出：$R_{z'}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha)$

$$=R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)\underline{R_{y'}^{-1}(\beta)R_{y'}(\beta)}R_z(\alpha)$$

$$=R_z(\alpha)R_y(\beta)\underbrace{R_z^{-1}(\alpha)\cdot R_z(\gamma)}_{\text{对易}}\cdot R_z(\alpha)$$

$$=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$

这是个固定坐标系下的转动！

利用 R 与 $\mathcal{D}$ 的对应：

$$D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)=\langle j,m'|e^{-\frac{iJ_z\alpha}{\hbar}}\cdot e^{-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}}\cdot e^{-\frac{iJ_z\gamma}{\hbar}}|j\,m\rangle$$

$$=e^{-i(m'\alpha+m\gamma)}\langle j\,m'|e^{-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}}|j\,m\rangle$$

$$=e^{-i(m'\alpha+m\gamma)}d^{(j)}_{m'm}(\beta)$$ ← 非平庸转动

§量子力学中的对称性

1. 对称性与守恒和简并密切相关

· 经典力学中的对称性

拉氏量 $L(q_i, \dot{q}_i)$，如果 L 在变换 $q_i \to q_i + \delta q_i$ 下不变，也就是 $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$，那么根据 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$，可知 $\frac{dP_i}{dt} = 0$，$\left(\because P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$ 这就是动量守恒

也可以哈密顿方程导出同样的结论：$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{dP_i}{dt} = 0$.

前提是系统平移不变

· 量子力学中的对称性

我们知道平移或转动对应一个么正算符，记为 $\mathcal{S}$. 习惯上把 $\mathcal{S}$ 称为对称操作，不论物理系统是否真的有 $\mathcal{S}$ 下的不变性.

对无穷小变换：$\mathcal{S} = 1 - \frac{iG}{\hbar}\cdot\varepsilon$，$G^\dagger = G$ 是厄密的，生成元.

设系统在 $\mathcal{S}$ 下不变，意思是 $\langle\alpha|\mathcal{S}^\dagger H \mathcal{S}|\alpha\rangle = \langle\alpha|H|\alpha\rangle$

$|\alpha\rangle$ 任意，∴就是 $\mathcal{S}^\dagger H \mathcal{S} = H$.

这意味着 $[H, G] = 0$. 根据Heisenberg方程 $\frac{dG}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[G, H] = 0$

所以 G 是守恒量，或称运动常数. 例 $\mathcal{S}$ 是平移，G 就是 P.

我们也可以从本征态的角度看. 设 $t=0$ 时系统处于 G 的本征态 $|g\rangle$：$G|g\rangle = g|g\rangle$. 那 $t>0$ 时，$|t\rangle = U(t,0)|g\rangle$

其中 $U(t,0) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$，$\therefore [U, G] = 0 \Rightarrow G|t\rangle = UG|g\rangle = gU|g\rangle = g|t\rangle$

∴系统仍处于 G 的本征态 $|g\rangle$.

再来讨论简并性.

设 $[\Psi, H]=0$.（即是 $\Psi^{+} H \Psi = H$）

考虑 H 的本征态 $|n\rangle$: $H|n\rangle = E_n|n\rangle$

由于 $H\Psi|n\rangle = \Psi H|n\rangle = E_n \Psi|n\rangle$, 所以 在 $\Psi|n\rangle$ 与 $|n\rangle$ 不相同时,（$\Psi|n\rangle \neq e^{i\gamma}|n\rangle$）能级简并.

考虑 $\Psi = \mathcal{D}(R)$. 假设一个系统是旋转不变的.

即是说 $\mathcal{D}^{+}(R) H \mathcal{D}(R) = 0$ 或 $[\mathcal{D}(R), H]=0$.

这点可由 $[\vec{J}, H]=0$ 保证. 同时, $[J^2, H]=0$.

我们知道可以找到 J^2, J_z 与 H 的共同本征态 $|n, j, m\rangle$.

并且由上面讨论, $\mathcal{D}(R)|n, j, m\rangle$ 与 $|n, j, m\rangle$ 属同一能级.

我们将 $\mathcal{D}(R)|njm\rangle$ 展开成 $|njm'\rangle$ 的叠加.

$$\mathcal{D}(R)|njm\rangle = \sum_{m'} |njm'\rangle\langle njm'|\mathcal{D}(R)|njm\rangle$$

这里利用了完备性关系. ← 由 $\mathcal{D}(R)|njm\rangle$ 不改变 j 保证.

上式可写成 $\mathcal{D}(R)|njm\rangle = \sum_{m'} D^{(j)}_{m'm}(R)\,|n\ell m'\rangle$

这意味着对于任意的转动 R, $\mathcal{D}(R)|njm\rangle$ 都是同个能量. 这意味着每一个 $|njm'\rangle$ 都是同一能量. 因此能级简并度为 $2j+1$.

这个系统的一个实例就是碱金属原子.

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) + V_{LS}(r)\,\vec{L}\cdot\vec{S}$$ 由于 $\vec{L}\cdot\vec{S} = J^2 - L^2 - S^2$

$\Rightarrow [\vec{J}, H]=0$, $\Rightarrow [\mathcal{D}(R), H]=0$. 旋转不变!

能级必须 $2j+1$ 简并.

相反. 如果加上了外电场或磁场: $\vec{\mu}\cdot\vec{B}$, 旋转对称性破坏

能级不再 $2j+1$ 简并. 这就是 Zeeman 效应