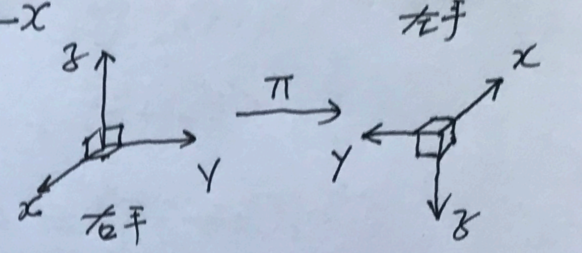
第21讲

§ 离散对称性. 宇称.

前面我们只讨论了连续对称算符(操作): 无穷小操作"生成".
本节讨论"离散"的对称操作: 宇称 (parity)

宇称又称空间反射: $\vec{x} \longrightarrow -\vec{x}$

它把一个右手坐标系变成左手.



现在我们从量子力学角度看.

考虑一个给定的 $|\alpha\rangle$, 经过一个空间反射操作, 得到一个新的态 $\pi|\alpha\rangle$. 在 $\pi|\alpha\rangle$ 下 $\vec{x}$ 的期望值应该反向.

$$\langle\alpha|\pi^{+}\cdot\vec{x}\cdot\pi|\alpha\rangle = -\langle\alpha|\vec{x}|\alpha\rangle.$$

由于 $|\alpha\rangle$ 任意, 所以就要求 $\pi^{+}\vec{x}\pi = -\vec{x}$ 或 $\vec{x}\pi = -\pi\vec{x}$

(我们利用了 $\pi^{+}\pi = \pi\pi^{+} = 1$, 即 π 是幺正的).

以上可认为是对 π 的定义.

由于 $\vec{x}\pi|\vec{x}'\rangle = -\pi\vec{x}|\vec{x}'\rangle = -\pi(\vec{x}')|\vec{x}'\rangle = (-\vec{x}')\pi|\vec{x}'\rangle$

∴ $\pi|\vec{x}'\rangle$ 是 $\vec{x}$ 的本征值为 $-\vec{x}'$ 的本征态.

因此 $\pi|\vec{x}'\rangle = e^{i\delta}|-\vec{x}'\rangle$, δ 是任意实数, 一般选 $\delta=0$

即 π 操作将 $|\vec{x}'\rangle$ 变成 $|-\vec{x}'\rangle$.

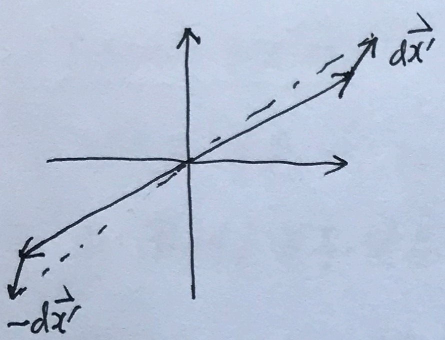
选 $\delta=0$, 可以保证: $\pi^2|\vec{x}'\rangle = \pi|-\vec{x}'\rangle = |\vec{x}'\rangle$

∴ $\pi^2 = 1 \Rightarrow \pi^{+} = \pi = \pi^{-1}$ π 是厄密的, → 本身是力学量!

其本征值为 ±1 → 测量值.

• 那动量 $\vec{p}$ 在 $\pi|\alpha\rangle$ 态的期望值会怎样变换？

我们利用 $\vec{p}$ 是平移操作的生成元来分析：看 $\langle\alpha|\pi^{+}\vec{p}\,\pi|\alpha\rangle$ 与 $\langle\alpha|\vec{p}|\alpha\rangle$ 的关系. 可以先看 $\pi\cdot\mathcal{T}(d\vec{x}')|\alpha\rangle$ 的效果.



假设 $|\alpha\rangle=|\vec{x}\rangle$， $\mathcal{T}(d\vec{x}')|\vec{x}\rangle=|\vec{x}+d\vec{x}'\rangle$

$$\pi\mathcal{T}(d\vec{x}')|\vec{x}\rangle=|-(\vec{x}+d\vec{x}')\rangle$$

$$=|-\vec{x}-d\vec{x}'\rangle=\mathcal{T}(-d\vec{x}')|-\vec{x}\rangle$$

$$=\mathcal{T}(-d\vec{x}')\pi|\vec{x}\rangle$$

$$\therefore \pi\mathcal{T}(d\vec{x}')=\mathcal{T}(-d\vec{x}')\pi \Rightarrow \pi\mathcal{T}(d\vec{x}')\pi^{+}=\mathcal{T}(-d\vec{x}')$$

也就是： $\pi\left(1-\frac{i\vec{p}\cdot d\vec{x}'}{\hbar}\right)\pi^{+}=1+\frac{i\vec{p}\cdot d\vec{x}'}{\hbar}$

$$\Rightarrow \pi^{+}\vec{p}\,\pi=-\vec{p} \quad \text{或} \quad \{\pi,\vec{p}\}=0.$$

• 角动量的变换方式呢？

对~~轨~~轨道角动量 $\vec{L}=\vec{x}\times\vec{p}$，可得 $\pi^{+}\vec{L}\pi=\vec{L}$.

因为每个分量都与 π 对易.

对自旋角动量怎么办？

考虑3维空间的转动与反射操作.

我们可以写出 π 的矩阵 $R^{(P)}=\begin{pmatrix}-1&&0\\&-1&\\0&&-1\end{pmatrix}$，

证明 ~~再利用~~ $R^{(P)}R^{(r)}=R^{(r)}R^{(P)}$，再利用"对应式"

$$\pi\mathcal{D}(R^{(r)})=\mathcal{D}(R^{(r)})\pi, \quad \text{和} \quad \mathcal{D}(R)=1-i\frac{\vec{J}\cdot\vec{n}}{\hbar}\varepsilon$$

$$\Rightarrow \pi^{+}\vec{J}\pi=\vec{J} \quad \text{或} \quad [\pi,\vec{J}]=0.$$

在转动情况，$\vec{J}$ 与 $\vec{x}$ 的变换方式一样，所以可称为矢量。但是 $\vec{x}$ 与 $\vec{p}$ 在 π 变换下是奇的，而 $\vec{J}$ 是偶的，所以性质不同。$\vec{x}$ 与 $\vec{p}$ 称为 polar 矢量，$\vec{J}$ 称轴 axial 矢量，或 pseudo vectors.

再考虑一个物理量 $\vec{S}\cdot\vec{x} = S_1x_1+S_2x_2+S_3x_3$.

根据对易关系容易证明 $[\mathscr{D}(R), \vec{S}\cdot\vec{x}]=0$，类似于 $\vec{S}\cdot\vec{L}$ 与 $\vec{x}\cdot\vec{p}$

然而 $\pi^+\vec{S}\cdot\vec{x}\,\pi = -\vec{S}\cdot\vec{x}$，$\pi^+\vec{S}\cdot\vec{L}\,\pi = \vec{S}\cdot\vec{L}$

因此 $\vec{S}\cdot\vec{x}$ 称为 pseudo scalar.

- 宇称变换下的波函数.

我们知道 $\psi(\vec{x}) = \langle\vec{x}|\alpha\rangle$. 那么 $\langle\vec{x}|\pi|\alpha\rangle = \langle-\vec{x}|\alpha\rangle = \psi(-\vec{x})$

对于 π 的本征态 $|\alpha\rangle$: $\pi|\alpha\rangle = \pm|\alpha\rangle$;

$\langle\vec{x}|\pi|\alpha\rangle = \pm\langle\vec{x}|\alpha\rangle = \psi(-\vec{x}) \Rightarrow \psi(\vec{x}) = \pm\psi(\vec{x})$

即其波函数是偶或奇的.

不是所有的我们感兴趣的波函数都有确定的宇称.

比如 $\psi_p(x) = e^{i\frac{px}{\hbar}}$ 它没有宇称性. 这是由于 $[P,\pi]\neq0$.

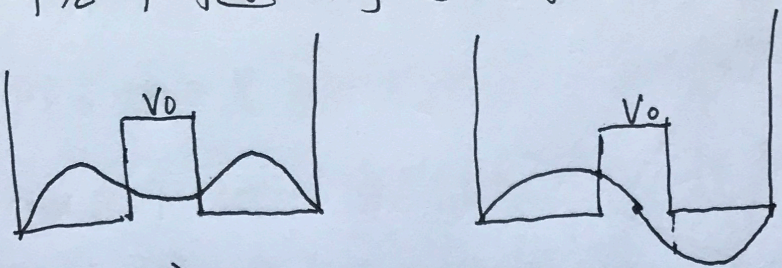
而角动量的本征态有确定宇称. $Y_{lm}(\theta,\varphi) = (-1)^l Y_l(\theta',\varphi')$

其中. $\theta' = \pi-\theta$, $\varphi' = \pi+\varphi$.

定理：设 $[\pi, H]=0$. $|n\rangle$ 是 H 的属于 E_n 的本征态. 且 $|n\rangle$ 不简并，则 $|n\rangle$ 有确定宇称.

证明：定义 $\frac{1}{2}(1\pm\pi)|n\rangle$，证明其是 π 的本征态. 也是 H 的本征态，本征值为 E_n.

• 我们来研究一个有趣的问题：对称双势阱



对称 $|S\rangle$ 　　　　反对称 $|A\rangle$

由于 $[H,\pi]=0$，且不简并，所以能级有宇称．最低的能级是 $|S\rangle$，偶宇称，第一激发态 $|A\rangle$，奇宇称．这是由于 $|A\rangle$ 的倾斜程度 ψ' 更大，动能大．$\Rightarrow E_A > E_S$.

我们可以构造一个 $|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|S\rangle - |A\rangle)$ 和一个 $|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|S\rangle + |A\rangle)$

处于 $|R\rangle$ 态时粒子大概率出现在右边，反之处于 $|L\rangle$ 态时，出现在左边．它们不是 π 的本征态，也不是能量本征态．假设 $t=0$ 时，粒子处于 $|R\rangle$ 态，那么 $t>0$ 时．

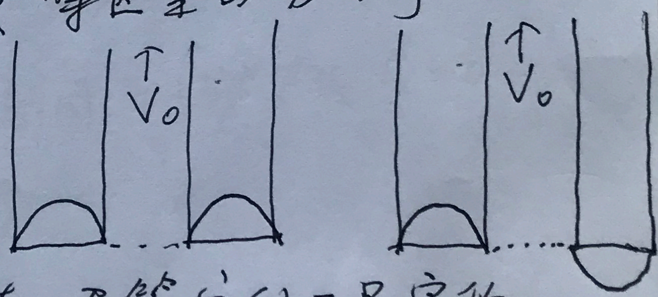
$$|t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{iE_S t}{\hbar}} |S\rangle - e^{-\frac{iE_A t}{\hbar}} |A\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_S t}{\hbar}} \left(|S\rangle - e^{-i\frac{E_A - E_S}{\hbar}t} |A\rangle\right)$$

当 $t = \frac{T}{2} = \frac{2\pi\hbar}{2(E_A - E_S)}$ 时，$|t\rangle \sim |L\rangle$

$t = T$ 时，$|t\rangle$ 回到 $|R\rangle$．

这是一个粒子从一侧穿越经典禁区来回另一侧的过程．



现在令中间的势垒 $V_0 \to \infty$

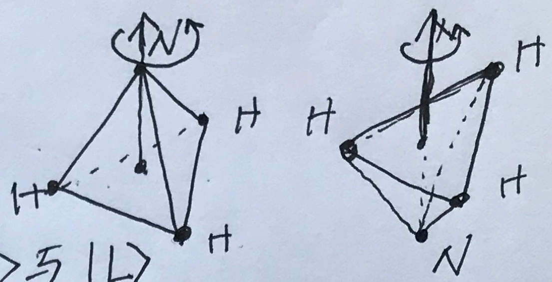
$|S\rangle$ 与 $|A\rangle$ 趋于简并．于是

$|R\rangle$ 与 $|L\rangle$ 也成为能量本征态，尽管它们不是宇称的本征态．一旦粒子处于 $|R\rangle$，它将永远处于 $|R\rangle$．简并使得

甲

基态不遵守H的对称性，是对称性破缺的例子。

一个实际的例子是 NH_3 分子。



N原子可以处于3个H原子组成平面的上方或下方，类似于 $|R\rangle$ 与 $|L\rangle$.

而 $[H,\pi]=0$，其能量本征态也同时是 π 的本征态，因此是 $|R\rangle$ 与 $|L\rangle$ 的叠加。偶宇称与奇宇称态的能量差对应 $24000\,MHz = \frac{E_A - E_S}{\hbar}$.

自然界中存在一些有机分子，如糖与氨基酸，只有R型或L型，称为有确定手性(handedness)。其振荡(隧穿)时间在 10^4-10^6 年的量级。因此实际上不会变成另一手性。如果在实验室合成糖，会有一半R，一半L。自然界为什么选择R(或L)？可能是宇宙大爆炸的随机结果？

- 宇称选择定则。

设 $\pi|\alpha\rangle = \varepsilon_\alpha|\alpha\rangle$, $\pi|\beta\rangle = \varepsilon_\beta|\beta\rangle$, $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta = \pm 1$

则 $\langle\beta|\vec{x}|\alpha\rangle = 0$. 除非 $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_\beta$

证: $\langle\beta|\vec{x}|\alpha\rangle = \langle\beta|\pi^+\pi\,\vec{x}\,\pi^+\pi|\alpha\rangle = -\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\langle\beta|\vec{x}|\alpha\rangle$

其实就是说：如果 ψ_α, ψ_β 宇称相同，$\int\psi_\beta^*\vec{x}\,\psi_\alpha\,d^d x = 0$.

跃迁的选择定则. due to Wigner.

对于非简并能级，$[H,\pi]=0$ 的系统，有 $\langle n|\vec{x}|n\rangle=0$.
即电偶极矩为零.
对于简并能级，没有这个结论.
推广：宇称性为奇的算符，如 $\vec{p}$，$\vec{S}\cdot\vec{x}$ 只有不同宇称性的态之间有非零矩阵元.

- 宇称不守恒.

(1) 守恒：若 $[H,\pi]=0$，那么 $\pi|t\rangle=\pi U(t)|\alpha(0)\rangle$
$=U(t)\pi|\alpha(0)\rangle$

在初态有宇称的条件下：$\pi|\alpha(0)\rangle=\varepsilon|\alpha(0)\rangle$.

$\pi|t\rangle=U(t)\varepsilon|\alpha(0)\rangle=\varepsilon|t\rangle$.

∴ 宇称守恒.

(2) 描述基本粒子间弱相互作用的 H 不是空间反射不变的。因此即使初态有宇称，其衰变末态仍可以是不同宇称态的叠加. 衰变产物的角分布依赖于 $\langle\vec{S}\rangle\cdot\vec{p}$，← pseudoscalar.
此物理量可以"感觉"到 $|\alpha\rangle$ 宇称性的变化!