§ 在对称规范中讨论

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}By\,\vec{e}_x + \frac{1}{2}Bx\,\vec{e}_y$$

$$H_{xy} = \frac{1}{2\mu}\left[\left(p_x - \frac{eB}{2c}y\right)^2 + \left(p_y + \frac{eB}{2c}x\right)^2\right]$$

交叉项 $-(p_x y + y p_x) + (p_y x + x p_y)$

$$= 2(x p_y - y p_x) = 2L_z$$

$$H_{xy} = \frac{1}{2\mu}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{e^2B^2}{8\mu c^2}(x^2 + y^2) + \frac{eB}{2\mu c}L_z$$

- 当电子运动范围很小 $x^2+y^2 \sim 0$（比如在原子内部）

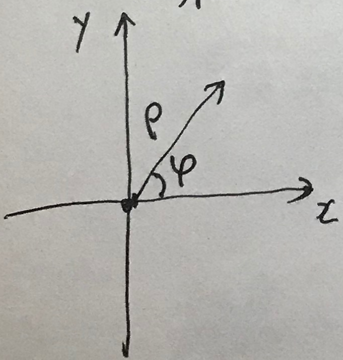
$$H_{xy} = \frac{1}{2\mu}(p_x^2 + p_y^2) - \vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

$$\mu_z = \frac{-e}{2\mu c}L_z$$

- 在xy平面内求解 $H_{xy}\psi(x,y) = E\psi(x,y)$

极坐标下 $p_x^2 + p_y^2 = -\hbar^2\nabla^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \frac{\hbar^2\partial^2}{\rho^2\partial\varphi^2}$

$$= p_\rho^2 + \frac{L_z^2}{\rho^2}$$



$$H_{xy} = \frac{p_\rho^2}{2\mu} + \frac{L_z^2}{2\mu\rho^2} + \frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2 + \omega_L L_z$$

其中 $\boxed{\omega_L \equiv \frac{eB}{2\mu c} = \frac{\omega_c}{2}}$

- without $\omega_L L_z$, $H_{xy} \to p_x^2 + \frac{1}{2}\mu\omega_L^2 x^2 + p_y^2 + \frac{1}{2}\mu\omega_L^2 y^2$

二维谐振子

• 包含 $\omega_L L_z$, $\because H_{xy}=\left(\frac{P_\rho^2}{2\mu}+\frac{L_z^2}{2\mu\rho^2}\right)+\frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2+\omega_L L_z$

$[L_z, H_{xy}]=0 \Leftarrow \because L_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$

$\therefore$ 取 (L_z, H_{xy}) 为力学量完全集

$\psi_E(x,y)$ 可设为 $\boxed{R(\rho)e^{im\varphi}}$

再定义 $\chi=\rho^{\frac{1}{2}}R, \Rightarrow \int R^2(\rho)\rho\, d\rho=\int \chi^2 d\rho$

代入本征方程 $H_{xy}\psi_E=E\psi_E$

$$\left(\frac{P_\rho^2}{2\mu}+\frac{m^2\hbar^2}{2\mu\rho^2}+\frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2+\omega_L m\hbar\right)R(\rho)=ER(\rho)$$

$$\rho^{\frac{1}{2}}\frac{P_\rho^2}{2\mu}R+\frac{m^2\hbar^2}{2\mu\rho^2}\chi+\frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2\chi=(E-m\hbar\omega_L)\chi \quad ①$$

$$\chi'=\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^{\frac{1}{2}}R)=\frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}R+\rho^{\frac{1}{2}}R'$$

$$\chi''=-\frac{1}{4}\rho^{-\frac{3}{2}}R+\frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}R'+\frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}R'+\rho^{\frac{1}{2}}R''$$

$$P_\rho^2R=-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)R$$

$$=-\hbar^2(R''+\rho^{-1}R')$$

$$\rho^{\frac{1}{2}}P_\rho^2R=-\hbar^2\left(\rho^{\frac{1}{2}}R''+\rho^{-\frac{1}{2}}R'-\frac{1}{4}\frac{\rho^{\frac{1}{2}}R}{\rho^2}\right)-\frac{\hbar^2}{4\rho^2}\chi$$

$$\therefore ① \Rightarrow \frac{-\hbar^2}{2\mu}\chi''+\frac{\hbar^2}{2\mu\rho^2}\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\chi+\frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2\chi=(E-m\hbar\omega_L)\chi \quad ②$$

• $\omega_L L_z$ 的作用仅仅是移动 $E\to E-m\hbar\omega_L\equiv E'$

②是二维谐振子本征方程(径向) ②

- 通过分离变量，容易求解二维谐振子.

但是②式是要求 ψ_E 是 L_z 的本征态.

我们在极坐标下来求解. $E' = E - m\omega_L\hbar$

$$② \rightarrow \quad \chi'' + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E' - \frac{(m+\frac{1}{2})(m-\frac{1}{2})\hbar^2}{2\mu\rho^2} - \frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2\right)\chi = 0 \qquad ③$$

可以利用现成的三维中心力解（三维各向同性振子）

$$\text{其径向：}\ \chi'' + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} - \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2\right)\chi = 0 \quad ④.$$

$$E = (2n_r + l + \tfrac{3}{2})\hbar\omega = (N + \tfrac{3}{2})\hbar\omega, \quad N \equiv 2n_r + l$$

$$\chi = r^{l+1} e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}} F(-n_r, l+\tfrac{3}{2}, \alpha^2 r^2)$$

$$\text{where} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$$

对比③式与④式：$\rho \rightarrow r$

$$|m| - \tfrac{1}{2} \rightarrow l \qquad (\text{当}\ m<0,\ -m-\tfrac{1}{2} \rightarrow l)$$

$$\therefore E' = (2n_\rho + |m| - \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2})\hbar\omega_L$$

$$\boxed{E = (2n_\rho + |m| + m + 1)\hbar\omega_L = (N+1)\hbar\omega_L = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega_c}$$

$$n = \tfrac{1}{2}N = n_\rho + \frac{(|m|+m)}{2} = \begin{cases} n_\rho + m, & \text{if } m \geq 0 \\ n_\rho, & \text{if } m<0 \end{cases}$$

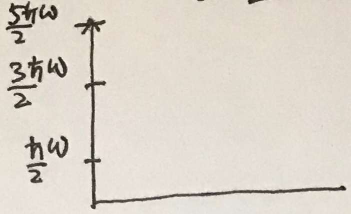
$$\chi = \rho^{|m|+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha_L^2\rho^2}{2}} F(-n_\rho, |m|+1, \alpha_L^2\rho^2)$$

$$\text{where} \quad \boxed{\alpha_L^2 = \frac{\mu\omega_L}{\hbar} = \frac{1}{2}\frac{eB}{\hbar c}}, \quad \frac{\pi B(\frac{1}{\alpha_L})^2}{\frac{hc}{e}} = 1$$

$$\psi_E = \rho^{-\frac{1}{2}}\chi e^{im\varphi}$$

讨论：

1、 $E=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_c$ 与 Landau gauge 的结果一致.



* 第三种 $\vec{A}=(B,Bx,0)$

也一样

2、 简并度

• 基态 $n_\rho=0$, 所有 $m<0$ 的态能量相同 $\Rightarrow f=\infty$.

$|m|$ 对应转动能, ↑

m 对应的势能, ↓

其它能级也一样.

• 对于有限尺寸系统：面积 A 的圆盘.

简并波函数的"半径" $R^2 \propto \frac{2|m|+1}{2\alpha_L^2}$.

$m=0,-1,-2,\cdots\cdots,\alpha_L^2R^2-1$

$$f=\alpha_L^2R^2=\frac{eBR^2}{2\hbar c}=\frac{eBA}{hc}=\frac{BA}{\frac{hc}{e}}$$

与 Landau gauge 相同.

（具体见作业）

3. 两种规范得到的本征波函数不同.

通常：好量子数选取得不同.

例：三维各向同性谐振子. 以 H_x, H_y, H_z 为完全集与以 H, L^2, L_z 为完全集的能量本征函数 ψ_{n_x,n_y,n_z} 与 $\psi_{n,l,m}$，互相表示，取为不同的表象

§ Landau Level 与 Quantized Hall effect

朗道研究并解决了带电粒子在均匀磁场中的能级问题

得到. 1. 三维金属的抗磁性 (orbital diamagnetism)

2. 低温下，随外加磁场增强，磁矩的符号反复变更(德哈斯-范阿尔芬效应).

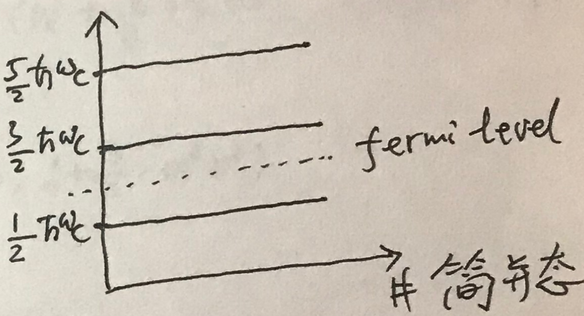
• 二维电子气

$E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_c$ (没有 E_z)

简并度 $f=\frac{BA}{(\frac{hc}{e})}$

当电子数 N_e/f=整数.

费米面处于能隙中(Energy Gap)



⇒ 量子化的 Hall 电导 $\sigma_H=\nu\cdot\frac{e^2}{h}$

$\nu=\frac{N_e}{f}$ 整数量子 Hall effect

• 电子的相互作用导致

分数量子 Hall 效应 fractional Hall effect.

$$H=\sum_i \frac{1}{2m}\left|p_i+\frac{qA(r_i)}{c}-\frac{q}{c}a_i\right|^2+\underline{V_{Coulomb}}$$

a_i : Chern-Simons 矢势，gauge 变换

$$\nabla\times a(\vec{r})=4\pi\sum_i\delta(r-r_i)$$