§ 规范变换的一些补充

熟知 $V(\vec{r}) \to V(\vec{r}) + V_0$，$V_0$ 常数

不影响"物理"

量子力学里情况怎么样？

$$H \to \tilde{H} = H + V_0 = \frac{P^2}{2\mu} + V(\vec{r}) + V_0$$

设初态 $|\alpha(0)\rangle$，分别计算 H 与 $\tilde{H}$ 下态矢的时间演化 $|\alpha(t)\rangle$ 与 $|\tilde{\alpha}(t)\rangle$

$$|\tilde{\alpha}(t)\rangle = e^{-i\frac{\tilde{H}t}{\hbar}}|\alpha(0)\rangle = e^{-i\left[\frac{P^2}{2\mu} + V(\vec{r}) + V_0\right]\frac{t}{\hbar}}|\alpha(0)\rangle$$

$$= e^{-i\frac{V_0 t}{\hbar}}|\alpha(t)\rangle \qquad (\text{用到 } [V_0, P] = 0)$$

其中 $|\alpha(t)\rangle = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|\alpha(0)\rangle$

将 $|\alpha(0)\rangle$ 展开成 $|E\rangle$ 的叠加：

$$|\alpha(0)\rangle = \sum_E C_E |E\rangle$$

则 $|\alpha(t)\rangle = \sum_E C_E e^{-\frac{iEt}{\hbar}}|E\rangle$

$$|\tilde{\alpha}(t)\rangle = \sum_E C_E e^{-i\frac{E+V_0}{\hbar}t}|E\rangle$$

有没有可观测的物理效应？

考虑任一物理量 Q

$$\langle Q\rangle = \sum_{E,E'} C_{E'}^{*} C_E \langle E'|Q|E\rangle e^{-i\frac{E-E'}{\hbar}t}$$

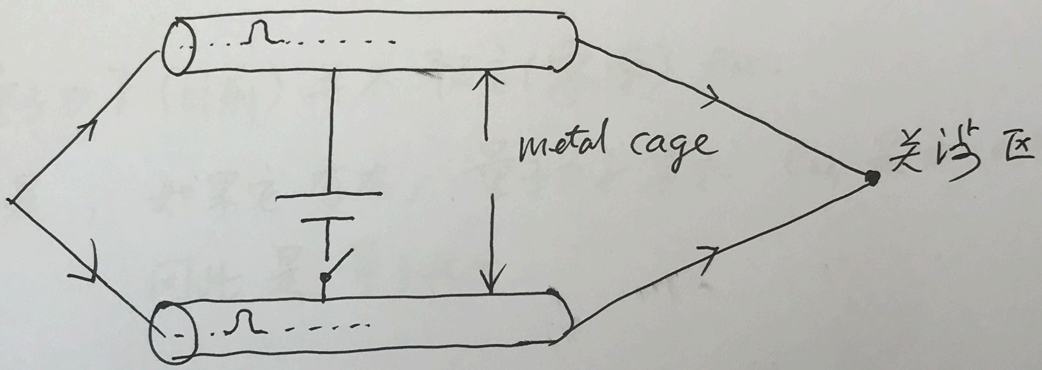
只有 $E-E'$ 起作用，与 V_0 无关！

你甚至可以让 $V_0(t)$，

$$|\tilde{\alpha}(t)\rangle = e^{-i\int_0^t d\tau \frac{V_0(\tau)}{\hbar}} |\alpha(t)\rangle$$

结果不变.

尽管 V_0 的绝对大小无关紧要，但是 V_0 的差值是可测的！



带电粒子，其波包应小于cage的长度

进入后开电源，出去前关电

$V(x)$ 均匀，$E=0$，粒子不受力

但是波的位相不同：$\phi_1-\phi_2 = \frac{1}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} d\tau \left[V_2(\tau)-V_1(\tau)\right]$

可以看到干涉.

- 此为纯量子力学效应：

  干涉 $\propto \cos(\phi_1-\phi_2)$，$\hbar\to 0$，$\boxed{\text{太快}}$ 变化看不到

§磁单极子 magnetic monopole

$$\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$$
$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{c\,\partial t}$$
$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$
$$\nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

如果 $\nabla\cdot\vec{B} = 4\pi\rho_M$ 就完美对称了!

ρ_M 是 e_M 密度，e_M 为磁荷 或 磁单极子

那磁场也有源 source 了.

量子力学(目前)并不预言(需要) e_M.

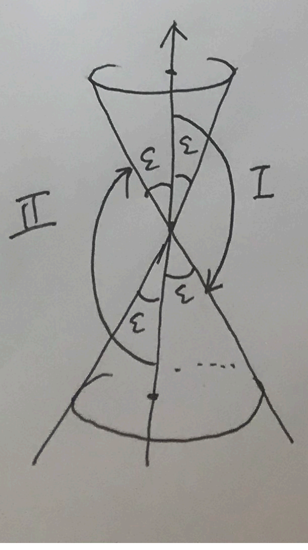
但是，如果它存在，量子力学要求 e_M 是由 $e,\hbar,c$ 决定，

因此是量子化的

证明：假设有一个 e_M，位于原点，由 $\nabla\cdot\vec{B} = 4\pi\rho_M$

$$\vec{B} = \frac{e_M}{r^2}\hat{r}$$

用矢势$\vec{A}$描述它：$\vec{A} = \dfrac{e_M(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\phi}$



$$\because\ \nabla\times\vec{A} = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r}$$
$$+\left[\frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\hat{\theta}$$
$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}$$
$$=\vec{B}$$

但是有问题：$\vec{A}$在负z轴发散！

了解理解，如果$\vec{A}$不奇异，则 $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$.

$\Rightarrow \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_V \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})\,dv=0$

我们想描述靠近负z轴的$\vec{B}$，就要放弃$\vec{A}$单一的要求。取

$$A^{(I)}=\frac{e_M(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\varphi} \qquad 当\ \theta<\pi-\varepsilon$$

$$A^{(II)}=-\frac{e_M(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\varphi} \qquad 当\ \theta>\varepsilon$$

在重叠区域，$A^{(I)}$与$A^{(II)}$任意

$$A^{(II)}-A^{(I)}=-\frac{2e_M\hat{\varphi}}{r\sin\theta}=\nabla\Lambda$$

利用 $\nabla\Lambda=\frac{\partial\Lambda}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi}\hat{\varphi}$

$$\therefore \Lambda=-2e_M\phi$$

考虑一带电e的粒子在$\vec{B}=\frac{e_M}{r^2}\hat{r}$中的波函数，设为$\psi$，

$$\psi^{(II)}=e^{-\frac{2ie e_M\phi}{\hbar c}}\psi^{(I)}$$

$\psi^{(II)}$与$\psi^{(I)}$必须单值，取$\theta=\frac{\pi}{2}$，固定r

$$\psi^{(I)}(r,\tfrac{\pi}{2},0)=\psi^{(I)}(r,\tfrac{\pi}{2},2\pi) \qquad 周期2\pi\ in\ \phi$$

我们看到

$$\psi^{(\mathrm{II})}(r, \tfrac{\pi}{2}, 0) = \psi^{(\mathrm{I})}(r, \tfrac{\pi}{2}, 0)$$

$$\psi^{(\mathrm{II})}(r, \tfrac{\pi}{2}, 2\pi) = e^{-\frac{4iee_M\pi}{\hbar c}} \psi^{(\mathrm{I})}(r, \tfrac{\pi}{2}, 2\pi)$$

$$= e^{-\frac{4iee_M\pi}{\hbar c}} \psi^{(\mathrm{II})}(r, \tfrac{\pi}{2}, 0)$$

$$\therefore \frac{2ee_M}{\hbar c} = \pm n, \quad n = 0, \pm 1, \cdots$$

$$\therefore e_M = \frac{\hbar c}{2e} \times n$$

这就是荷磁量子化

历史： 1931, Dirac

1968, T.T. Wu and C.N. Yang.