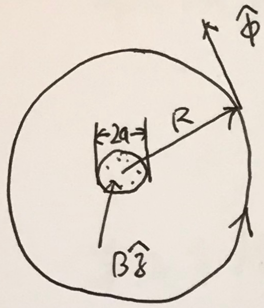
§ 圆环上带电粒子的运动与磁通

我们研究一个圆环上的带电 q 的粒子. 环内有一根



无限长螺线管穿过，半径 a，通电后：

内部：$\vec{B} = B\hat{z}$，外部：$B=0$

$r\le a$：$\vec{A} = \frac{r}{2}B\hat{\varphi}$，$r>a$：$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi R}\hat{\varphi}$，$\Phi = B\pi a^2$

验证：$\int \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{s} = \oint \vec{A}\cdot d\vec{l}$

由于轴对称：$\begin{cases} B\pi r^2 = A\cdot 2\pi r & \leftarrow r\le a \\ B\pi a^2 = A\, 2\pi r & \leftarrow r>a \end{cases}$

- 在没有通电时，$\vec{B}=0$ 全空间

$$H = \frac{L_z^2}{2\mu R^2} \qquad \left(\text{二维：} -\hbar^2\nabla^2 = P_\rho^2 + \frac{L_z^2}{\rho^2}\right.$$
$$\left.\text{但圆环没有径向 } P_\rho;\right)$$

H本征态 $\psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}e^{im\varphi}$，$m=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$$E_m = \frac{m^2\hbar^2}{2\mu R^2}$$

- 通电后

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(P_\varphi - \frac{q}{c}A_\varphi\right)^2 \qquad \text{注：} \vec{P} = P_\varphi\hat{e}_\varphi = -\frac{i\hbar}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left(-\frac{i\hbar}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{q\Phi}{c\,2\pi R}\right)^2$$

$$= \frac{-\hbar^2}{2\mu R^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{iq\Phi}{hc}\right)^2$$

求解能量本征方程

$$H\psi(\varphi)=E\psi(\varphi)$$

引入试探解 $\psi(\varphi)=\Phi(\varphi)\,e^{\frac{iq\Phi}{\hbar c}\varphi}$

由于 $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{iq\Phi}{\hbar c}\right)\Phi(\varphi)\,e^{\frac{iq\Phi}{\hbar c}\varphi}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)e^{\frac{iq\Phi}{\hbar c}\varphi}$

本征方程化为

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu R^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi(\varphi)=E\Phi(\varphi)$$

解为 $\Phi(\varphi)=e^{im'\varphi}$

$$E=\frac{m'^2\hbar^2}{2\mu R^2}$$

$\Phi(\varphi)$本身并不是波函数，$\psi(\varphi)=\Phi(\varphi)e^{\frac{iq\Phi}{\hbar c}\varphi}$才是

$\psi(\varphi+2\pi)=\psi(\varphi)$ 是波函数单值的结果

因此 $m'+\frac{q\Phi}{\hbar c}$ 是整数，定义为 $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$

- 能量本征函数 $\psi_E(\varphi)=\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi R}}$

但是注意 $E_m=\frac{\hbar^2}{2\mu R^2}m'^2=\frac{\hbar^2}{2\mu R^2}\left(m-\frac{q\Phi}{\hbar c}\right)^2$

能谱发生移动：$m=0$ 的能级 ↑

（按 $\frac{\Phi}{\frac{hc}{q}}$ 的强弱） $m=1,-1$ 的能级分裂 ↑↓

设想 $t=0$ 时，不通电，电子处于 $E_{m=0}=\frac{m^2\hbar^2}{2\mu R^2}=0$ 的能级，$\psi_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$

缓慢增加螺线管电流，电子仍然处于 $\psi_{m=0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$ 态

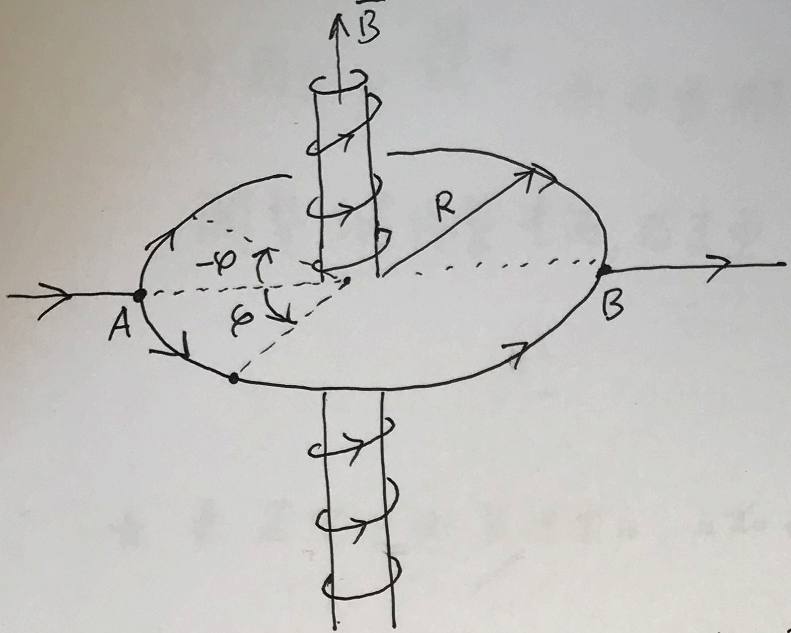
但是能量 $E=\frac{\hbar^2}{2\mu R^2}\frac{q^2\Phi^2}{h^2c^2}$，上升，$m'$ 决定，

机械角动量 $R(P_\varphi-\frac{qA_0}{c})=m'\hbar$ 提升了

☆ 在没有 $\vec{B}$ 的地方，系统能通过 $\vec{A}$ "感觉"到这处的磁通！

此效应称为"定态" AB效应（Aharonov-Bohm effect）

§ AB效应，非定态



简化模型：带电 e 粒子进入圆环，兵分两路于 A 点（$\varphi=0$）

含时 Shrödinger 方程：

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\varphi,t)}{\partial t} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{-i\hbar}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{e}{c}\frac{\Phi}{2\pi R}\right)^2 \psi(\varphi,t)$$

试探：$\psi(\varphi,t) = \Psi(\varphi,t)\, e^{\frac{ie\Phi}{\hbar c}\varphi}$

得到

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\varphi,t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2\mu R^2}\frac{\partial^2 \Psi(\varphi,t)}{\partial \varphi^2} \qquad ①$$

沿 $\hat{\varphi}$ 方向与 $-\hat{\varphi}$ 方向运动的波 $\Psi(\varphi,t)$ 与 $\Psi(-\varphi,t)$

在 $\varphi=\pi$ 处汇合

$$\psi(\pi,t) = \Psi(\pi,t)\, e^{\frac{ie\Phi}{\hbar c}\pi} + \Psi(-\pi,t)\, e^{-\frac{ie\Phi}{\hbar c}\pi}$$

$\Phi(\pi,t)$ 和 $\Phi(-\pi,t)$ 与磁通 Φ 无关，但是 $\psi(\pi,t)$ 和 $\psi(-\pi,t)$

由于因子 $e^{\frac{i e \Phi}{hc}\varphi}$ 而与 Φ 有关：相位差 $\Delta\varphi = \frac{e\Phi}{hc}$.

调整螺线管电流，改变 Φ，可以在 B 点观察到干涉现象

AB 效应

phys. Rev. ~~Lett~~ 115, 485 (1959)

☆ Φ 是完全由 $\vec{B}$ 决定的，in the end of the day!