粒子在电磁场中的运动

- $H = T + V,$　电势能 $V = -\dfrac{Ze^2}{r}$;　磁偶极子势能$V = -\mu \cdot \mathbf{B}$;
  怎样描述自由电子在电磁场中的运动?

- 经典理论：
  - 牛顿方程　$\mu \ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \dfrac{1}{c}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$
  - Lorentz力不能写成势能V
  - 能否写成正则方程的形式?　哈密顿量怎么写?

经典运动方程的哈密顿形式

- 引入矢势$\mathbf{A}$和电势ϕ
  - $\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
  - $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -q(\nabla\phi + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) + \dfrac{q}{c}\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})$
- 只要定义$H = \dfrac{1}{2\mu}(\mathbf{P} - \dfrac{q}{c}\mathbf{A})^2 + q\phi$，利用正则运动方程
  $\dot{\mathbf{r}} = \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}, \quad \dot{\mathbf{P}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}$ 可以导出上式

- 注意 $\dot{\vec{r}} = \dfrac{\partial H}{\partial \vec{P}} \rightarrow \mu\dot{\vec{r}} = \vec{P} - \dfrac{q}{c}\vec{A}$

- $\mathbf{P}$不等于$\mu\dot{\mathbf{r}}$，称为正则动量； $\pi \equiv \mu\dot{\mathbf{r}}$ 称为机械动量

- 对机械动量再求导 $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{P}} - \dfrac{q}{c}\dot{\mathbf{A}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} - \dfrac{q}{c}\dot{\mathbf{A}}$

  ×分量 $\mu\ddot{x} = -q(\dfrac{\partial\phi}{\partial x} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial A_x}{\partial t}) + \dfrac{q}{c}(\dot{\vec{r}} \cdot \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial x} - \dot{\vec{r}} \cdot \nabla A_x)$

- 利用矢量公式 $\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = 2\mathbf{A} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$; $\dfrac{d\mathbf{A}}{dt} = \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla \mathbf{A}$

- 可以导出牛顿运动方程

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -q(\nabla\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) + \frac{q}{c}\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

Schrodinger方程

- $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha\rangle = H|\alpha\rangle$
- 坐标表象 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle x|\alpha\rangle = H(x, -i\hbar\nabla)\langle x|\alpha\rangle$
- 我们利用了$\mathbf{P} = -i\hbar\nabla$，$H = \frac{1}{2\mu}(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2 + q\phi$
- 这称为正则量子化

一些讨论

- 矢势与正则动量不一定对易

$$P \cdot A\psi = [(-i\hbar\nabla)\cdot A]\psi + A\cdot(-i\hbar\nabla)\psi$$

即$[P, A] = P \cdot A$

- 如果选取库仑规范，即$\nabla \cdot A = 0$, 则$[P, A] = 0$
- 波函数的几率解释不受影响： 可以导出

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{j} = \frac{1}{2\mu}(\psi^* \pi \psi + \psi \pi^* \psi^*) = \frac{-i\hbar}{2\mu}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{q}{\mu c} A\rho$$

即原来公式中的动量算符应该是机械动量算符

. 几率流密度：利用$\psi = \sqrt{\rho}e^{iS/\hbar}$，我们可以表示出$\vec{j} = \frac{\rho}{\mu}(\nabla S)$；　公式改写为

$$\vec{j} = \frac{\rho}{\mu}(\nabla S - \frac{qA}{c})$$