

6.6 EPR佯谬与Bell不等式

历史上Einstein等人提出了著名的EPR佯谬，用来质疑量子力学的理论基础。Bohm根据他们的理论提出了以下理想实验。

考虑一个中性 π^0 介子衰变成一个电子和一个正电子

$$\pi^0 \rightarrow e^- + e^+. \quad (6.97)$$

由于介子自旋为零，动量为零，所以电子和正电子形成单态，飞向两边（假设电子飞向左边，记为粒子1；正电子向右，记为粒子2）：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2). \quad (6.98)$$

我们利用两个SG装置测量两个电子的自旋 z 分量。

单独看两边的测量结果

$$\langle S_z(1) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\hbar}{2}\right) = 0 \quad (6.99)$$

$$\langle S_z(2) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\hbar}{2}\right) = 0 \quad (6.100)$$

更直接地考虑： $|+\rangle_1|-\rangle_2$ 是 $S_z(1)$ 的本征态，本征值为 $\hbar/2$ ； $|-\rangle_1|+\rangle_2$ 也是 $S_z(1)$ 的本征态，本征值是 $-\hbar/2$ ；几率各为1/2。所以平均仍为0。

但是如果把两边的结果乘起来，就是说读取 $S_z(1)S_z(2)$ ，并计算其统计平均，也就是量子力学期望值

$$\langle S_z(1)S_z(2) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \langle -|_1 \langle +|_2 - \langle +|_1 \langle -|_2) S_z(1)S_z(2) \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2) = -\frac{\hbar^2}{4}. \quad (6.101)$$

更直接地考虑： $|+\rangle_1|-\rangle_2$ 是 $S_z(1)S_z(2)$ 的本征态，本征值为 $-\hbar^2/4$ ； $|-\rangle_1|+\rangle_2$ 也是 $S_z(1)S_z(2)$ 的本征态，本征值还是 $-\hbar^2/4$ ；几率各为1/2。所以平均仍为 $-\hbar^2/4$ 。

虽然 $S_z(1), S_z(2)$ 取 $\pm \frac{\hbar}{2}$ 的几率都是 $\frac{1}{2}$ ，但是 $S_z(1)$ 取 $\frac{\hbar}{2}$ ， $S_z(2)$ 一定取 $-\frac{\hbar}{2}$ ，反之亦反。这表明两个电子之间有关联，这称为量子关联！

为方便后面讨论，我们定义 $C(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \langle (\vec{\sigma}(1) \cdot \vec{n}_1)(\vec{\sigma}(2) \cdot \vec{n}_2) \rangle = \langle \sigma_{\vec{n}_1}(1) \sigma_{\vec{n}_2}(2) \rangle$ 。其中 $\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 为两台SG装置 SG_1, SG_2 的测量设置方向。容易证明

$$\langle \sigma_{\vec{n}_1}(1) \sigma_{\vec{n}_2}(2) \rangle = -\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \quad (6.102)$$

Eq. (6.101)是 $\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \hat{z}$ 的特殊情况。

进一步，让我们设想：在左边完成了对电子的 S_z 测量，为向上，那么此之后 Δt 时间对右边正电子测量 S_z 结果就永远为向下。这是由于波函数应该塌缩为 $S_z(1)$ 的本征值为 $\hbar/2$ 的本征态；由于两个粒子处于自旋单态Eq.(6.98)，所以实际塌缩到

$$|+\rangle_1|-\rangle_2. \quad (6.103)$$

我们可以设置 SG_1, SG_2 在非常远的地方，保证测量发生在几乎同时： $\Delta t \cdot c < \Delta s$ ， c 为光速， Δs 为距离。按相对论语言，两点是“类空”的，应该没有因果关系！可是波函数的塌缩改变了类空距离之外的粒子的状态。因此，似乎与相对论矛盾。这就是Einstein, Podolsky, Rosen提出的EPR佯谬，建立在任何影响的传播速度不能大于光速的基础上。他们进而认为量子力学是‘不完备’的，为了完全描述系统的状态，不能光靠波函数（或者说量子态），而需要某个额外的参量 λ ，称为隐变量。

假设完全(complete)的态由 λ 给出， λ 在每个 π 介子衰变时都不一样，我们既不理解也没法控制它。换言之，两个粒子的态不是确定的(6.98)。

进一步，我们假设在测量 $\sigma_{\vec{n}}$ 时，左边电子的测量与右边正电子的角度 $\vec{n}'$ 完全无关。（可以在刚要测量电子之前，由正电子一端实验者设置 $\vec{n}'$ ，使得没有信息可以传达到电子一端）。实验结果 $\sigma_{\vec{n}}(1)$ 一定可以写成某种函数

$$A(\vec{n}, \lambda) = \pm 1, \quad (6.104)$$

同理, 对于右边的试验结果 $\sigma_{\vec{n}'}(2)$, 一定可以写成另一个函数

$$B(\vec{n}', \lambda) = \pm 1 \quad (6.105)$$

注意 λ 是描述整个状态的. 我们同时知道实验结果要求: 对相同方向 $\vec{n}_1$, 测量结果 A, B 反平行, 因此对所有的 λ , 满足

$$A(\vec{n}, \lambda) = -B(\vec{n}, \lambda) \quad (6.106)$$

但要点是: 这不是通过波函数塌缩来保证的, 而是由之前 π 介子衰变时的变量 λ 保证的.

隐变量理论同样可以得到Eq. (6.100) 与Eq. (6.101)的结果. 理论假设测量的不确定性由参数 λ 的概率分布 $\rho(\lambda)$ 决定.

我们来根据隐变量理论计算测量关联 $C(\vec{n}, \vec{n})$:

$$C(\vec{n}, \vec{n}) = \int \rho(\lambda) A(\vec{n}, \lambda) B(\vec{n}, \lambda) d\lambda = -1, \quad (6.107)$$

其中 $\rho(\lambda)$ 是经典几率密度: 满足归一化, 非负性.

$$\langle \sigma_{\vec{n}}(1) \rangle = \int \rho(\lambda) A(\vec{n}, \lambda) d\lambda = 0 = \langle \sigma_{\vec{n}}(2) \rangle \quad (6.108)$$

隐变量理论是否正确一直没法验证. 直到1964年, J. Bell证明了隐变量理论要求测量结果必须遵从Bell不等式, 而量子力学理论没有这个要求. 这为试验验证提供了基础.

Bell建议测量 $C(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$, 即两个自旋乘积的平均值. 隐变量理论要求结果必须满足

$$|C(\vec{n}_1, \vec{n}_2) - C(\vec{n}_1, \vec{n}_3)| \leq 1 + C(\vec{n}_2, \vec{n}_3), \quad (6.109)$$

这就是著名的Bell不等式.

量子理论明显不满足这一不等式: 取 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ 在一个平面内, $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 成 $\pi/2$, $\vec{n}_3$ 与它们成 $\pi/4$. 于是根据量子力学结果(6.102)

$$C(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0, \quad (6.110)$$

$$C(\vec{n}_1, \vec{n}_3) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = C(\vec{n}_2, \vec{n}_3) \quad (6.111)$$

Bell不等式为 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, 不成立!

6.6.1 Bell不等式的证明

根据Eq. (6.106),

$$C(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = - \int \rho(\lambda) A(\vec{n}_1, \lambda) A(\vec{n}_2, \lambda) d\lambda \quad (6.112)$$

注意如果 $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$, 那么上式为-1, 是我们试图利用的实验事实.

现在我们考虑第三个方向 $\vec{n}_3$, 它是任意的

$$C(\vec{n}_1, \vec{n}_2) - C(\vec{n}_1, \vec{n}_3) = - \int \rho(\lambda) [A(\vec{n}_1, \lambda) A(\vec{n}_2, \lambda) - A(\vec{n}_1, \lambda) A(\vec{n}_3, \lambda)] d\lambda \quad (6.113)$$

由于 $(A(\vec{n}, \lambda))^2 = 1$. (因为测量值为 ± 1)

$$C(\vec{n}_1, \vec{n}_2) - C(\vec{n}_1, \vec{n}_3) = - \int \rho(\lambda) [1 - A(\vec{n}_2, \lambda) A(\vec{n}_3, \lambda)] A(\vec{n}_1, \lambda) A(\vec{n}_2, \lambda) d\lambda$$

由于(6.104),

$$-1 \leq A(\vec{n}_1, \lambda) A(\vec{n}_2, \lambda) \leq 1, \quad (6.114)$$

$$\rho(\lambda)[1 - A(\vec{n}_2, \lambda)A(\vec{n}_3, \lambda)] \geq 0 \quad (6.115)$$

绝对值小于

$$\begin{aligned} |C(\vec{n}_1, \vec{n}_2) - C(\vec{n}_1, \vec{n}_3)| &\leq \int \rho(\lambda)[1 - A(\vec{n}_2, \lambda)A(\vec{n}_3, \lambda)]d\lambda \\ &= 1 - \int \rho(\lambda)A(\vec{n}_2, \lambda)(-B(\vec{n}_3, \lambda))d\lambda \\ &= 1 + C(\vec{n}_2, \vec{n}_3) \end{aligned}$$

这就是Bell不等式了.

我们的出发点是(6.108),即两个方向的关联是通过事先存在的隐变量决定的,而不是波函数的塌缩.

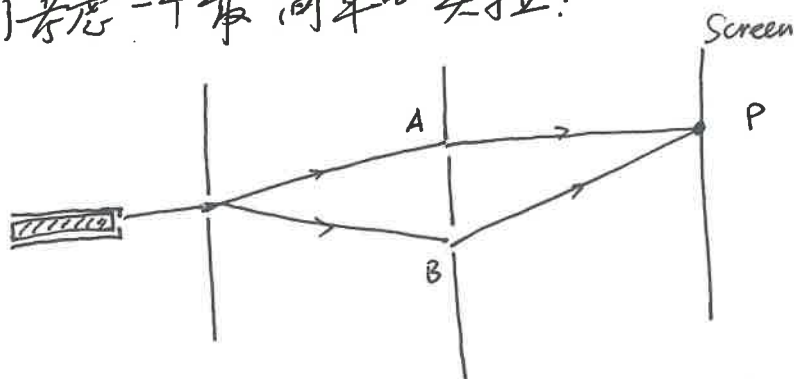
目前,已有大量实验符合量子力学预言,违背Bell不等式!波函数的瞬间塌缩是解释实验所必需的.

但是波函数的塌缩会不会带来因果性的灾难?实际上一个操作左边电子测量的人,可以根据自己的实验记录知道右边正电子的实验记录;但是却没有任何方法可以利用他的测量对右边正电子测量的人发出一个能够产生后果的信号,因此并不违背相对论.(请大家参考Griffiths书12.2节.)

第10讲

§ 路径积分量子化

让我们考虑一个最简单的实验：



电子枪发射一个电子。该电子可通过路径A到达屏上P点。

也可以通过路径B到达P点。

记两条路径到达P点的几率幅分别为 a_A 与 a_B 。
 $\psi_A(P)$ $\psi_B(P)$

由于“程差”， $a_A/a_B \sim e^{i\phi}$ 。模近似相同。因此在P点发现电子

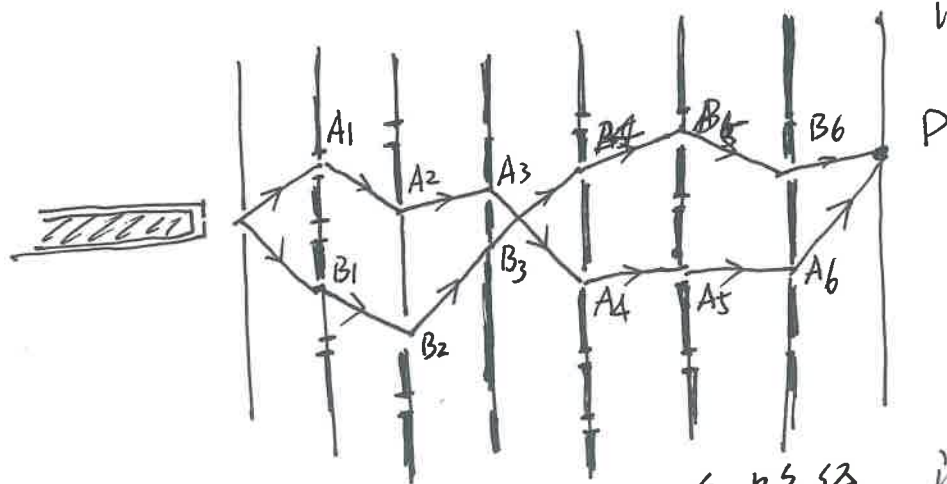
的几率为 $|a_A + a_B|^2 = |a_A|^2 + |a_B|^2 + 2|a_A||a_B|\cos\phi$ 。这就是

干涉条纹的来历。

$$2|\psi_A|^2$$

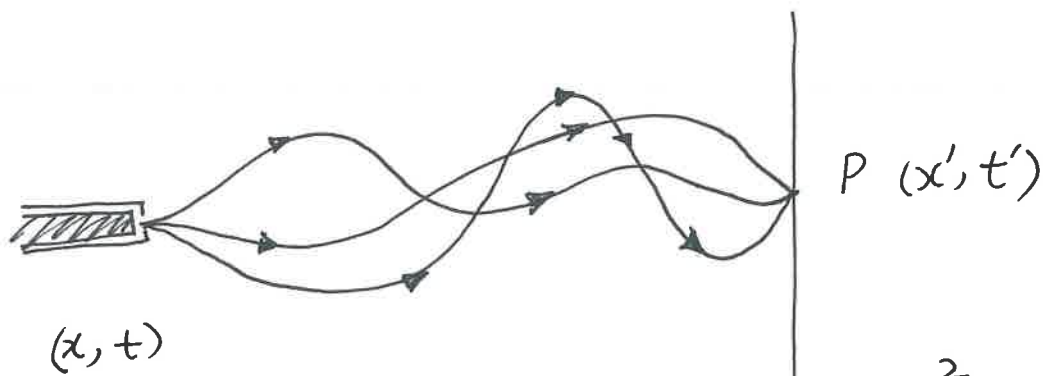
ϕ 随P的移动而变化

据说 Feynman 问3个问题：再放一个挡板会怎样？
放n个呢？每个板上打不止一个洞呢？



m个板上的n个洞：给出一条路径，记其到P的几率幅为 a_c ，在P点找到电子的几率： $|\sum_c a_c|^2$
 C标记路径：比如 $A_1 A_2 \dots A_6$ ，或 $B_1 B_2 B_3 \dots B_6$ 。

随着 $m \rightarrow \infty$, $\hbar \rightarrow 0$, 板没有了! 但是“路径”还在.



到 P 点几率 = $|\text{所有路径的几率幅积分}|^2$

• 这个图像与 Schrödinger 方程有什么关系?

我们来研究一个粒子的三维运动。比如一维谐振子

满足: $i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H |\psi\rangle$

写成波函数 $i\hbar \frac{\partial \langle x | \psi \rangle}{\partial t} = \langle x | H | \psi \rangle$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = H(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi(x, t)$$

其解可以用时间演化算符表示出来

$$|\psi(t')\rangle = U(t', t) |\psi(t)\rangle$$

$$\text{其中 } U(t', t) = e^{-i \frac{\hat{H} \cdot (t' - t)}{\hbar}}$$

$$\psi(x', t') = \langle x' | \psi(t') \rangle = \langle x' | U(t', t) | \psi(t) \rangle$$

$$= \int \langle x' | U(t', t) | x \rangle \langle x | \psi(t) \rangle dx$$

$$= \int U(x', t'; x, t) \cdot \psi(x, t) dx$$

$$\text{其中 } \boxed{U(x', t'; x, t) \equiv \langle x' | U(t', t) | x \rangle} \leftarrow \text{传播子}$$

从 (x, t) 到 (x', t')
时空

$$\text{设 } \psi(x, t) = \delta(x - x_0), \text{ 则 } \psi(x', t') = U(x', t', x_0, t)$$

咱们把 $t'-t$ 这段时间分成 N 分: $t'-t = N \cdot \Delta t$

第 k 个时刻 $t_k = t + k\Delta t$, $k=0, 1, \dots, N \rightarrow t_N = t'$

$$U(t', t) = e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar} \cdot (t'-t)}$$

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

$[A,B]=0$ 时 $e^{A+B} = e^A e^B$ [Glauber & Path]

$$= e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar} (t'-t_{N-1})} \cdot e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar} (t_{N-1}-t_{N-2})} \dots e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar} (t_1-t)}$$

$$\langle x' | U(t', t) | x \rangle = \int \langle x' | e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar} (t'-t_{N-1})} | x_{N-1} \rangle \langle x_{N-1} | e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar} (t_{N-1}-t_{N-2})} | x_{N-2} \rangle \dots \langle x_1 | e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar} (t_1-t)} | x \rangle dx_{N-1} \dots dx_1$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $x_N \quad x_0 \quad x_N \quad x_{N-1} \quad x_{N-2} \quad x_1 \quad x_0$

其中 $\langle x_{k+1} | e^{-\frac{i\hat{H}\Delta t}{\hbar}} | x_k \rangle = U(x_{k+1}, t_{k+1}; x_k, t_k)$

$$\approx \langle x_{k+1} | (1 - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t) | x_k \rangle \leftarrow \text{当 } \Delta t \rightarrow 0$$

$$\langle x_{k+1} | \hat{H} | x_k \rangle = \int dp_k \langle x_{k+1} | p_k \rangle \langle p_k | \hat{H} | x_k \rangle$$

由于 $\hat{H}$ 是 $\hat{x}$ 与 $\hat{p}$ 的函数, $\hat{p} |p_k\rangle = p_k |p_k\rangle$, (只讨论第 k 个“时刻”.)

例: $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$

$$\langle p_k | \hat{H}(\hat{x}, \hat{p}) | x_k \rangle = H(x_k, p_k) \langle p_k | x_k \rangle$$

$\langle x_k | p_k \rangle$ 是 $|p_k\rangle$ 的波函数: 平面波 $\langle x_k | p_k \rangle = \frac{e^{i \frac{p_k x_k}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$

$$\langle p_k | x_k \rangle = \langle x_k | p_k \rangle^*$$

$$\therefore U(x_{k+1}, t_{k+1}; x_k, t_k) = \int dp_k \langle x_{k+1} | p_k \rangle \langle p_k | x_k \rangle \times \left(1 - \frac{i\Delta t}{\hbar} H(x_k, p_k)\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_k}{2\pi\hbar} e^{i \frac{p_k (x_{k+1} - x_k)}{\hbar} - \frac{i\Delta t}{\hbar} H(x_k, p_k)}$$

$$\left[\frac{p}{h}\right] = \left[\frac{1}{\lambda}\right], \quad [U] = \left[\frac{1}{\lambda}\right].$$

最后:

$$U(x', t'; x, t) = \int \frac{dp_N \cdots dp_0}{(2\pi\hbar)^N} \int dx_N \cdots dx_1 \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{k=0}^{N-1} \left[p_k \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} - H(x_k, p_k) \Delta t \right]}$$

- 取极限 $N \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0$, 那么 $x_{k+1} - x_k = \dot{x}(t_k) \Delta t$
 $\sum_{k=0}^{N-1} \Delta t = \int_t^{t'} dt, \quad t_k \rightarrow \tau$

$$U(x', t'; x, t) = \left(\int \mathcal{D}p(\tau) \mathcal{D}x(\tau) \right) e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau [P(\tau) \dot{x}(\tau) - H(x(\tau), p(\tau))]} \quad (A)$$

两端固定.

每个时刻有 $x(t)$ 和 $p(t)$ 共同确定路径

- 回顾经典力学:

拉氏量 (Lagrangian)

作用量 (Action)

→ (A) 中 勒让德变换

$$L = p \cdot \dot{x} - H(x, p)$$

$$S = \int dt L(x, \dot{x}, p)$$

$$= \int dt [p(t) \dot{x}(t) - H(x(t), p(t))]$$

Hamilton canonical Eq: 正则方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x} \end{cases}$$

可由最小作用量原理导出: $\delta S = 0$

