

$$\langle \alpha(t_0) | \alpha(t_0) \rangle = \sum_{\alpha} \langle \alpha(t_0) | \alpha \rangle \langle \alpha | \alpha(t_0) \rangle = \sum_{\alpha} |C_{\alpha}(t_0)|^2 = 1$$

$$\langle \alpha(t) | \alpha(t) \rangle = \sum_{\alpha} |C_{\alpha}(t)|^2 = 1$$

时间本身不是力学量(算符)

• 时间平移(演化)

$$|\alpha(t)\rangle = U(t, t_0) |\alpha(t_0)\rangle, \text{ 由于 } \langle \alpha(t) | \alpha(t) \rangle = \langle \alpha(t_0) | \alpha(t_0) \rangle$$

$$\Rightarrow U^\dagger(t, t_0) \cdot U(t, t_0) = 1 \rightarrow \text{幺正}$$

仍然考虑无扰动. $U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1) U(t_1, t_0)$ 要求

$$|\alpha(t_0+dt)\rangle = U(t_0+dt, t_0) |\alpha(t_0)\rangle$$

乘法
对比投影算符

显然 $\lim_{dt \rightarrow 0} U(t_0+dt, t_0) = 1 \rightarrow \text{单位算符}$

又有 $U(t_0+dt+dt', t_0+dt) U(t_0+dt, t_0) = U(t_0+dt+dt', t_0) \leftarrow \text{乘法(小量)}$

令 $U(t_0+dt, t_0) = 1 - i\Omega dt$, 其中 $\Omega^\dagger = \Omega$, 又保持上面的性质 + 结合律 + $U^{-1}(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0)$

Ω 具有 $\frac{1}{\hbar}$ 的量纲. 我们知道 $[\hbar \Omega] = \text{能量}$.

自然地: $\Omega = \frac{H}{\hbar}$ 因此 $U(t_0+dt, t_0) = 1 - \frac{iHdt}{\hbar}$

承认这一点, 我们便可以导出 Schrödinger Eq!

$$U(t+dt, t_0) = U(t+dt, t) U(t, t_0) = \left(1 - \frac{iH}{\hbar} dt\right) U(t, t_0)$$

这里 $t-t_0$ 不一定无扰动. 因此

$$U(t+dt, t_0) - U(t, t_0) = -\frac{iH}{\hbar} dt U(t, t_0)$$

$$= U(t, t_0) + \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) dt - U(t, t_0)$$

$$\therefore \frac{i\hbar \partial}{\partial t} U(t, t_0) = H U(t, t_0) \quad \text{这就是演化算符}$$

形式的 S-eq. 作用到 $|\alpha(t_0)\rangle$

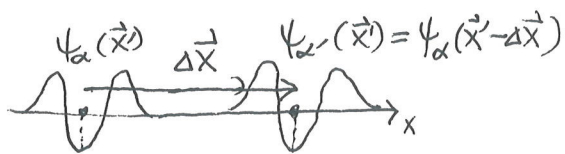
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) |\alpha(t_0)\rangle = H U(t, t_0) |\alpha(t_0)\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle = H |\alpha(t)\rangle \leftarrow \text{S eq}$$

进一步: $U(t, t_0) = e^{-\frac{iH}{\hbar}(t-t_0)}$, $\therefore H$ 是时间演化生成元

第十九讲

§(续)量子力学中的无穷小转动



$$\langle \vec{x} \rangle_{\alpha'} = \langle \vec{x} \rangle_{\alpha} + \Delta \vec{x} = \langle \vec{x} \rangle_{\alpha}$$

$$|\alpha'\rangle = T(\Delta \vec{x})|\alpha\rangle = T(\hat{1})|\alpha\rangle$$

• 空间转动(真实空间).

类似于前面讲到的空间与时间平移, 这种转动也应该导致态矢的“转动”:

$$|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha\rangle_R$$

另一种看法: $|\alpha\rangle$ 不变

$$(1 + \frac{i\vec{p} \cdot d\vec{x}'}{\hbar}) \psi(x) (1 - \frac{i\vec{p} \cdot d\vec{x}'}{\hbar}) = \psi(x + d\vec{x}')$$

设 R 为 3×3 正交矩阵, $\vec{V}' = R \vec{V}$. 与此对应

$$|\alpha\rangle_R = D(R)|\alpha\rangle$$

例: $\vec{V}$ 是 $\langle \alpha | \vec{L} | \alpha \rangle$, 或 $\langle \alpha | \vec{S} | \alpha \rangle$

$$\text{转动} \Rightarrow \langle \alpha | \vec{L} | \alpha \rangle_R = R \langle \alpha | \vec{L} | \alpha \rangle$$

$$\langle \alpha | \alpha \rangle_R = 1$$

* $D(R)$ 描述一个 Hilbert space 中的转动:

$$D^\dagger(R) \cdot D(R) = 1 \rightarrow \text{Unitary}$$

* $D(R)$ 的维数 $N = ?$ 这取决于你研究的物理系统.

比如一个自旋 $S = \frac{1}{2}$ 的系统, Hilbert space 维数是 2.

$D(R)$ 是个 2×2 矩阵.

* 我们从无穷小转动开始.

类似于无穷小平移 $T(\vec{\epsilon}) = 1 - \frac{i\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}}{\hbar}$, 无穷小时移 $U(\epsilon) = 1 - \frac{iH\epsilon}{\hbar}$

定义了动量与能量算符(分别是平移的生成元) 我们定义

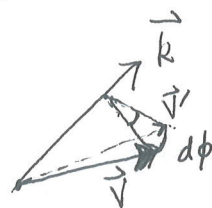
角动量是旋转操作的生成元

“旋转”指三维空间.

考虑一个绕 $\vec{k}$ 轴的无穷小转动 $R_{\vec{k}}(d\phi)$, 其对应的 $D(R_{\vec{k}}(d\phi))$

$$\text{可以写成: } D(R_{\vec{k}}(d\phi)) = 1 - i \frac{\vec{J}_{\vec{k}} \cdot d\phi}{\hbar}$$

其中 $\vec{J}_{\vec{k}}$ 是厄密的: $\vec{J}_{\vec{k}} = \vec{J}_{\vec{k}}^\dagger$



跟平移与时移一样, 这保证了 ① $D^\dagger(R_{\vec{k}}(d\phi)) = D^\dagger(R_{\vec{k}}(d\phi))$

↑ 么正性 $DD^\dagger = 1$

②. 当 $d\phi \rightarrow 0$, $D(R_{\vec{k}}(d\phi)) \rightarrow 1$

$$\text{引入简号 } D(R_{\vec{k}}(d\phi)) \equiv D(\vec{k}, d\phi) \equiv D_{\vec{k}}(d\phi)$$

①

更一般地, 我们有

$$\mathcal{D}(\vec{n}, d\phi) = 1 - i \left(\frac{\vec{J} \cdot \vec{n}}{\hbar} \right) d\phi$$

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = J_x n_x + J_y n_y + J_z n_z$$

对应一个绕 $\vec{n}$ 方向的无穷小转动 $d\phi$. $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ 为角动量!

- 我们这种定义角动量方式, 不同于定义 $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$, 是一种更严谨的定义. $\rightarrow$ 用于自旋角动量.

一个有限的转动可由绕同一轴的无穷小转动重复来实现

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_z(\phi) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 - i \frac{J_z}{\hbar} \left(\frac{\phi}{N} \right) \right]^N \leftarrow \mathcal{D}_z\left(\frac{\phi}{N}\right) \cdots \mathcal{D}_z\left(\frac{\phi}{N}\right) \\ &= e^{-i \frac{J_z}{\hbar} \phi} = 1 - i \frac{J_z \phi}{\hbar} + \frac{1}{2!} \left(i \frac{J_z \phi}{\hbar} \right)^2 + \cdots \end{aligned}$$

为获得角动量的对易关系, 我们需要假设 $\mathcal{D}(R)$ 与 R 有一样的群 (group) 性质 (对应)

- ① Identity (单位元) $R \cdot \mathbb{1} = R \Rightarrow \mathcal{D}(R) \cdot \mathbb{1} = \mathcal{D}(R)$
- ② closure (封闭性) $R_1 \cdot R_2 = R_3 \Rightarrow \mathcal{D}(R_1) \cdot \mathcal{D}(R_2) = \mathcal{D}(R_3)$
- ③ Inverses (逆) $R R^\dagger = \mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{D}(R) \mathcal{D}^\dagger(R) = \mathbb{1}$
- ④ Associativity (结合律) $R^\dagger R = \mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{D}^\dagger(R) \mathcal{D}(R) = \mathbb{1}$

$$\begin{aligned} R_1 (R_2 \cdot R_3) &= (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3 \Rightarrow \mathcal{D}(R_1) \cdot (\mathcal{D}(R_2) \mathcal{D}(R_3)) = [\mathcal{D}(R_1) \mathcal{D}(R_2)] \mathcal{D}(R_3) \\ &= R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = \mathcal{D}(R_1) \cdot \mathcal{D}(R_2) \cdot \mathcal{D}(R_3) \end{aligned}$$

下面利用之前得到的 $[R_x(\varepsilon), R_y(\varepsilon)] = R_z(\varepsilon^2) - 1$

来推导角动量对易关系. 保留到二阶小量

$$R_x(\varepsilon) \rightarrow \mathcal{D}_x(\varepsilon) = 1 - i \frac{J_x \varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2 \varepsilon^2}{2\hbar^2}$$

$$R_y(\varepsilon) \rightarrow \mathcal{D}_y(\varepsilon) = 1 - i \frac{J_y \varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2 \varepsilon^2}{2\hbar^2}$$

利用 R 与 $\mathfrak{so}(3)$ 对应.

$$[D_x(\varepsilon), D_y(\varepsilon)] = D_z(\varepsilon^2) - 1 = -\frac{iJ_z \varepsilon^2}{\hbar} \quad (\text{保留 } \varepsilon^2)$$

具体计算表明, ε 的 0 次与 1 次幂项抵消.

$$\varepsilon^2 \text{ 项: } \frac{J_x J_y \varepsilon^2}{\hbar^2} - \frac{J_y J_x \varepsilon^2}{\hbar^2} = \frac{iJ_z \varepsilon^2}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \boxed{[J_x, J_y] = i\hbar J_z}$$

推广: $[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$ 角动量的根本对易!

- 这些无穷小生成元不对易, 它们“生成”的群称为非阿贝尔 (Non-Abelian)

为得到这些无比重要的对易式, 我们只用了两条:

1. J_z 是绕 z 轴转动生成元
2. 绕不同轴的转动不对易.

§ 自旋1/2系统

满足 $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$ 的系统其最小维数是 $N=2$.

我们知道 $S_x = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle -| + |- \rangle\langle +|)$

$$S_y = i\frac{\hbar}{2} (-|+\rangle\langle -| + |- \rangle\langle +|)$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle +| - |- \rangle\langle -|)$$

这些表达式是利用对易关系获得的。

来考虑绕z轴的转动 ϕ (有限)

$$|\alpha\rangle_R = D_z(\phi) |\alpha\rangle, \text{ 其中 } D_z(\phi) = e^{-i\frac{S_z\phi}{\hbar}}$$

看之转动的效果. 计算 $\langle \alpha | S_x | \alpha \rangle_R$

$$\begin{aligned} \langle \alpha | S_x | \alpha \rangle_R &= \langle \alpha | D_z^\dagger(\phi) S_x D_z(\phi) | \alpha \rangle \\ &= \langle S_x \rangle_\alpha \cos\phi - \langle S_y \rangle_\alpha \sin\phi \end{aligned}$$

类似地, $\langle \alpha | S_y | \alpha \rangle_R = \langle S_y \rangle_\alpha \cos\phi + \langle S_x \rangle_\alpha \sin\phi$

$$\langle \alpha | S_z | \alpha \rangle_R = \langle S_z \rangle_\alpha$$

这里 $\langle S_x \rangle_\alpha \equiv \langle \alpha | S_x | \alpha \rangle$. 这记是我们熟悉的公式.

$$\begin{pmatrix} \langle S_x \rangle_R \\ \langle S_y \rangle_R \\ \langle S_z \rangle_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle S_x \rangle \\ \langle S_y \rangle \\ \langle S_z \rangle \end{pmatrix}$$

推广: $\langle J_k \rangle_R = \sum_l R_{kl} \langle J_l \rangle$ ← 推广到一般 N 的系统.

推导 1.
$$\begin{aligned} e^{\frac{iS_z\phi}{\hbar}} S_x e^{-\frac{iS_z\phi}{\hbar}} &= \frac{\hbar}{2} e^{\frac{iS_z\phi}{\hbar}} (|+\rangle\langle -| + |- \rangle\langle +|) e^{-\frac{iS_z\phi}{\hbar}} \\ &= \frac{\hbar}{2} (e^{\frac{i\phi}{2}} |+\rangle\langle -| e^{\frac{i\phi}{2}} + e^{-\frac{i\phi}{2}} |- \rangle\langle +| e^{-\frac{i\phi}{2}}) \\ &= \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle -| + |- \rangle\langle +|) \cos\phi + i(|+\rangle\langle -| - |- \rangle\langle +|) \sin\phi \\ &= S_x \cos\phi - S_y \sin\phi \end{aligned}$$