§ 自旋½系统

满足 $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$ 的系统 其最小维度是 $N=2$.

我们知道
$$S_x = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)$$
$$S_y = \frac{i\hbar}{2}(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)$$
$$S_z = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)$$
这些表达式是利用对易关系获得的.

来考虑绕z轴的转动 ϕ (有限)

$$|\alpha\rangle_R = \mathcal{D}_z(\phi)|\alpha\rangle, \quad \text{其中 } \mathcal{D}_z(\phi) = e^{-\frac{iS_z\phi}{\hbar}}$$

看看转动的效果: 计算 ${}_R\langle\alpha|S_x|\alpha\rangle_R$

$${}_R\langle\alpha|S_x|\alpha\rangle_R = \langle\alpha|\mathcal{D}_z^\dagger(\phi)\, S_x\, \mathcal{D}_z(\phi)|\alpha\rangle$$
$$= \langle S_x\rangle_\alpha \cos\phi - \langle S_y\rangle_\alpha \sin\phi$$

类似地,
$${}_R\langle\alpha|S_y|\alpha\rangle_R = \langle S_y\rangle_\alpha \cos\phi + \langle S_x\rangle_\alpha \sin\phi$$
$${}_R\langle\alpha|S_z|\alpha\rangle_R = \langle S_z\rangle_\alpha$$

这里 $\langle S_x\rangle_\alpha \equiv \langle\alpha|S_x|\alpha\rangle$. 这就是我们熟悉的公式.

$$\begin{pmatrix}\langle S_x\rangle_R\\ \langle S_y\rangle_R\\ \langle S_z\rangle_R\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle S_x\rangle\\ \langle S_y\rangle\\ \langle S_z\rangle\end{pmatrix}$$

缩写: $\langle J_k\rangle_R = \sum_l R_{kl}\langle J_l\rangle$ ← 推广到一般N的系统.

推导 1.
$$e^{\frac{iS_z\phi}{\hbar}}\, S_x\, e^{-\frac{iS_z\phi}{\hbar}} = \frac{\hbar}{2} e^{\frac{iS_z\phi}{\hbar}}(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)e^{-\frac{iS_z\phi}{\hbar}}$$
$$= \frac{\hbar}{2}\left(e^{\frac{i\phi}{2}}|+\rangle\langle-|e^{\frac{i\phi}{2}} + e^{-\frac{i\phi}{2}}|-\rangle\langle+|e^{-\frac{i\phi}{2}}\right)$$
$$= \frac{\hbar}{2}\left[(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)\cos\phi + i(|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|)\sin\phi\right]$$
$$= S_x\cos\phi - S_y\sin\phi$$

推导2：只利用对易关系！ 利用：

$$e^{iG\lambda}Ae^{-iG\lambda} = A + i\lambda[G,A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}[G,[G,A]] + \cdots + \frac{(i\lambda)^n}{n!}[G,\cdots[G,A]\cdots]$$

此为 Baker-Hausdorff lemma. $G=G^\dagger$，λ为参数.

$$e^{\frac{iS_z\phi}{\hbar}} S_x e^{-\frac{iS_z\phi}{\hbar}} = S_x + \left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)[S_z,S_x] + \cdots\cdots$$

$$= S_x - \phi S_y - \frac{\phi^2}{2!}S_x + \frac{\phi^3}{3!}S_y + \cdots\cdots$$

$$= S_x\cos\phi - S_y\sin\phi$$

$D_z^\dagger(\phi)\vec{S}D_z(\phi) = R_z(\phi)\vec{S}$
可视为 Heisenberg picture

$e^{-i\frac{S_z}{\hbar}\phi}$　对应

以上我们看到了态矢空间转动的效果：把 $\vec{S}$ 的期望值在3维空间转动！

下面看态矢自己：任意 $|\alpha\rangle = |+\rangle\langle+|\alpha\rangle + |-\rangle\langle-|\alpha\rangle$

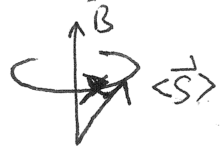
$$e^{-\frac{iS_z\phi}{\hbar}}|\alpha\rangle = e^{-\frac{i\phi}{2}}|+\rangle\langle+|\alpha\rangle + e^{\frac{i\phi}{2}}|-\rangle\langle-|\alpha\rangle$$

当 $\phi=2\pi$，即系统被旋转一圈 $\langle\vec{S}\rangle_R = \langle\vec{S}\rangle$，

$$|\alpha\rangle_{R_z(2\pi)} = -|\alpha\rangle.$$

$\phi=4\pi$：$|\alpha\rangle_{R_z(4\pi)} = |\alpha\rangle$.

我们之前研究过，通过自旋进动实验加干涉，可以看到这个物理效应.



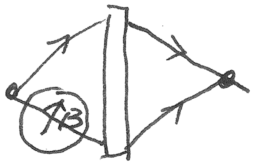
$= -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$，$\vec{\mu} = -\frac{e\vec{S}}{m_e c}$

进动：$H = \omega S_z$，$\omega = \frac{eB}{m_e c}$，B指向z.

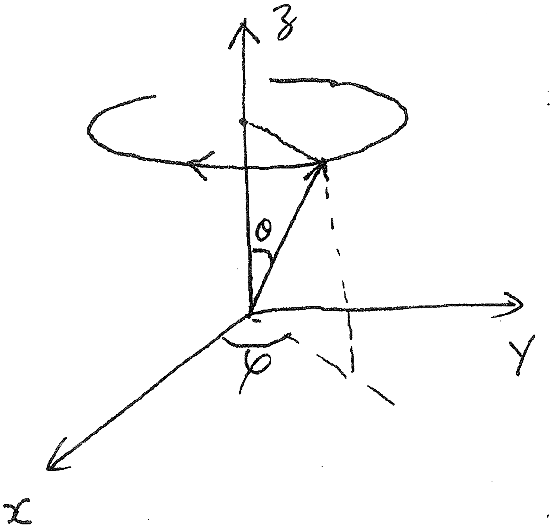
$$U(t,0) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = e^{-i\frac{S_z\omega t}{\hbar}} = D_z(\phi=\omega t)$$

- 时间演化就是一个转动：绕z转 $\phi=\omega t$！
- $\langle\vec{S}\rangle_R = R\langle\vec{S}\rangle$，$R = R_z(\omega t)$ 周期 $\frac{2\pi}{\omega}$
- $|\alpha(t)\rangle = U(t,0)|\alpha(0)\rangle = D_z(\omega t)|\alpha(0)\rangle$，周期 $\frac{4\pi}{\omega}$

实验中干涉



我们再来复习一个有趣的问题：Larmor pression（进动）



固定磁场 $\vec{B} = B\hat{z}$,

中子磁矩 $\vec{\mu} = g\mu_0\vec{\sigma}$

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z$$

$$\mu_0 = \frac{g_n e\hbar}{2mc}, \quad \mu_0 B = \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\omega = \frac{g_n e B}{mc}$$

初态 $|t=0\rangle = |\vec{n}(0)\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \Leftarrow \varphi=0.$

$t=t'$: $|t'\rangle = e^{-\frac{iHt'}{\hbar}}|\vec{n}(0)\rangle = e^{+\frac{i\omega\hbar}{2\hbar}\sigma_z t'}|\vec{n}(0)\rangle = e^{-\frac{iS_z}{\hbar}\frac{(\omega t')}{2}}|\vec{n}(0)\rangle$

绕z轴转 $-\frac{\omega t}{2}$

$$= e^{-\frac{iHt'}{\hbar}}\left(\cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle\right)$$

$$= \cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\omega t'}{2}}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\omega t'}{2}}|-\rangle$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\omega t'}{2}}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\omega t'}{2}}\end{pmatrix} \qquad U(t',0) = \mathcal{D}_z\left(-\frac{\omega t'}{2}\right)$$

计算 $\vec{\sigma}$ 的期望值 $\langle t'|\vec{\sigma}|t'\rangle = (\langle t'|\sigma_x|t'\rangle, \langle t'|\sigma_y|t'\rangle, \langle t'|\sigma_z|t'\rangle)$

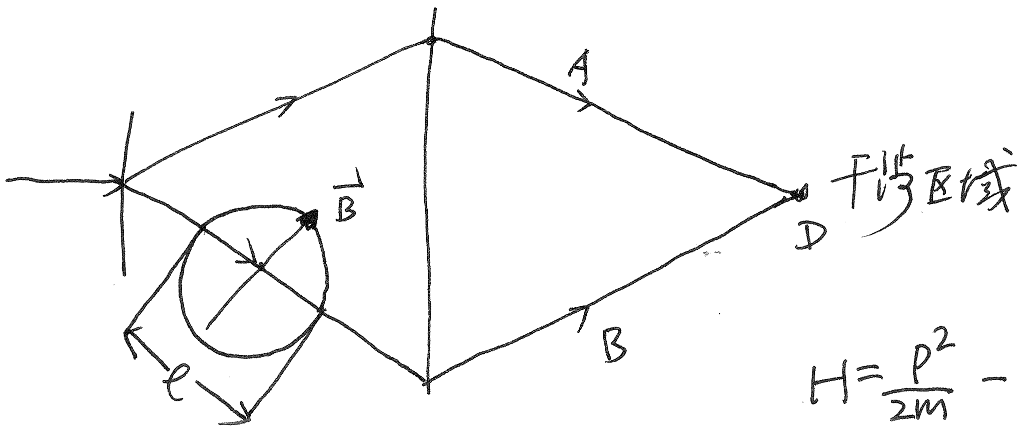
注意到：$|t'\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\varphi(t')}{2}}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\varphi(t')}{2}}\end{pmatrix} = |\vec{n}(\theta,\varphi)\rangle$, $\varphi(t') = -\omega t'$

$\therefore \langle t'|\vec{\sigma}|t'\rangle = \vec{n}(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\omega t', \sin\theta\sin(-\omega t'), \cos\theta)$

这就是自旋角动量的 Larmor pression. 周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$

但是 $|t'\rangle$ 的周期为 $T' = \frac{4\pi}{\omega}$ ！

这个效应可以通过下面的实验观测到.



$$H=\frac{p^2}{2m}-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

一个中子走两条路径，到达D点的时候波函数分别为

$\xi_A=\begin{pmatrix} C_1^A \\ C_2^A \end{pmatrix}$ 与 $\xi_B=\begin{pmatrix} C_1^B \\ C_2^B \end{pmatrix}$，（不同于之前作业，这里考虑初态不是自旋本征态）

设没有加磁场 $\vec{B}$ 时，$\xi_B=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$，$\xi_A$ 与 ξ_B 有相位差 δ

加上 $\vec{B}$ 之后，$\xi_B=\begin{pmatrix} c_1 e^{\frac{i\omega T}{2}} \\ c_2 e^{-\frac{i\omega T}{2}} \end{pmatrix}$，$\xi_A=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{i\delta}$

$$\omega=\frac{g_n eB}{mc},\quad T=\frac{l}{v},\quad mv=\hbar\cdot\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \Rightarrow T=\frac{lm\lambda}{h}$$

在D点处于 $|+\rangle$ 的波函数干涉.

$$I_+=\left|c_1 e^{i\delta}+c_1 e^{\frac{i\omega T}{2}}\right|^2=|c_1|^2\left(1+\cos\left(\frac{\omega T}{2}-\delta\right)\right)$$

处于 $|-\rangle$ 的波函数也干涉.

$$I_-=\left|c_2 e^{i\delta}+c_2 e^{-\frac{i\omega T}{2}}\right|^2=|c_2|^2\left(1+\cos\left(-\frac{\omega T}{2}-\delta\right)\right)$$

设 $|c_1|^2=|c_2|^2$,

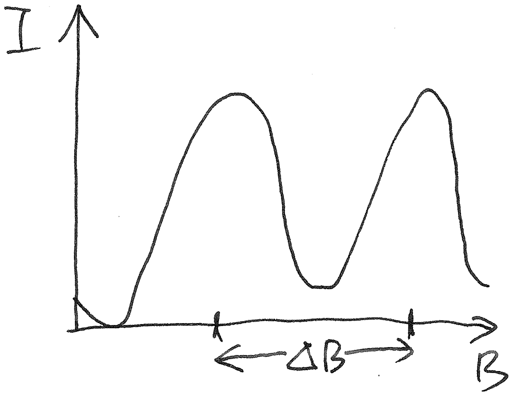
$$I=I_+ + I_- = 2|c_1|^2\left(1+\cos\frac{\omega T}{2}\cos\delta\right)$$

调整B的强度，可改变ω.

当 $\frac{g_n e \Delta B}{mc} \times \frac{T}{2} = 2\pi$ 时，干涉强度完成一个周期.

代入 $T = \frac{l m \lambda}{h}$

$$\Delta B = \frac{4\pi h c}{g_n e \lambda l}$$



* 以上推导中 $T = \frac{4\pi}{\omega}$ 态矢完成一个周期!

第20讲.

上节课我们利用 R 与 $\mathcal{D}(R)$ 的对应，得到了角动量的对易关系. $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$

对于 $S=\frac{1}{2}$ 的自旋系统，$\mathcal{D}(R_{\vec{n}}(\phi)) = e^{-i\frac{\vec{S}\cdot\vec{n}}{\hbar}\phi}$ 又利用 Pauli 算符化简：$\mathcal{D}(R_{\vec{n}}(\phi)) = e^{-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{n}}{2}\phi}$，再利用.

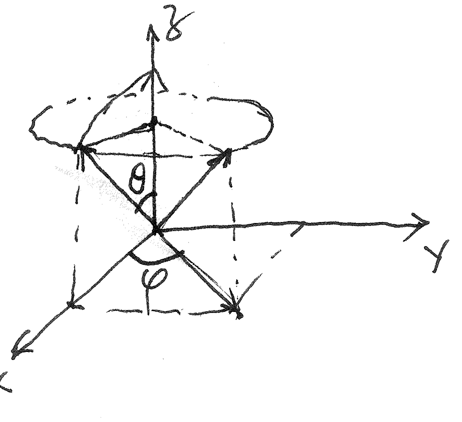
$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})^n = \begin{cases} 1 & \text{当}\, n\, \text{是 even} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{n}, & \text{当}\, n\, \text{是 odd}. \end{cases}$$

那么容易发现：
$$\boxed{\mathcal{D}(R_{\vec{n}}(\phi)) = \mathbb{1}\cos\frac{\phi}{2} - i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\sin\frac{\phi}{2}}$$

- 利用这个公式我们可以方便地写出 $|\vec{n}\rangle$，而不用去求解本征方程 $(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})|\vec{n}\rangle = |\vec{n}\rangle$，注意 $\langle\vec{n}|\vec{\sigma}|\vec{n}\rangle = (n_x, n_y, n_z)$

1. 首先我们知道对 $|+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\langle\vec{\sigma}\rangle = (0, 0, 1)^T$

将 $\langle\vec{\sigma}\rangle$ 绕 y 轴转 θ，得 $\langle\vec{\sigma}'\rangle = (\sin\theta, 0, \cos\theta)^T$



对应的态矢 $|+\rangle_R = (\cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_y\sin\frac{\theta}{2})|+\rangle$

2. 再绕 z 轴转 ϕ.

$$\langle\vec{\sigma}''\rangle = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)^T$$

对应的态矢记之 $|\vec{n}\rangle$

$$|\vec{n}\rangle = (\cos\frac{\varphi}{2} - i\sigma_z\sin\frac{\varphi}{2})(\cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_y\sin\frac{\theta}{2})|+\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\varphi}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\varphi}{2}}\end{pmatrix}$$

- 代入具体的 σ_z 和 σ_y, σ_x，我们可以写出 $\mathcal{D}(R_{\vec{n}}(\phi))$ 的矩阵.

$$\mathcal{D}_{\vec{n}}(\phi) = \begin{pmatrix}\cos\frac{\phi}{2} - in_z\sin\frac{\phi}{2}, & (-in_x - n_y)\sin\frac{\phi}{2} \\ (-in_x + n_y)\sin\frac{\phi}{2}, & \cos\frac{\phi}{2} + in_z\sin\frac{\phi}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ -b^* & a^*\end{pmatrix}$$

$\leftarrow S_z$ 表象

参数 $(\theta, \varphi) \to n_x, n_y, n_z$

ϕ 转角.

回头来，我们再看 $R_{\vec{n}}(\phi)$。在3维空间，给定坐标系，R是3×3的实矩阵。由于 $R^TR=1$，独立的参数有3个（对应2个方向参数一个转动角）。所有这些矩阵构成一个群，称为SO(3)群。

$\boxed{S \to \text{special}, \ \because \underset{\text{行列式}}{|R|}=1.}$ $O \to$ orthogonal. 排除 $R=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

R对应的2维自旋态矢空间转动 $D(R)$，是2×2复矩阵。但独立的参数仍是3个实数：~~n_x, n_y, ϕ~~ $\vec{n}(\theta,\varphi)$, ϕ。所有的这些矩阵构成一个群，称为SU(2)。$U \to$ Unitary. $S \to$ special unimodular: $|D|=1=|a|^2+|b|^2$

• SO(3)与SU(2)群都描述转动：但是 $R_{\vec{n}}(2\pi)$ 与 $R_{\vec{n}}(4\pi)$ 是同一个矩阵：单位矩阵，而对应的 $U(\vec{n},2\pi)=-1$, $U(\vec{n},4\pi)=1$. 可见这是个2对1的映射，可称局部同构. Locally isomophic

• 对于角动量量子数为j的系统，$R_{\vec{n}}(\phi)$ 对应 $D(R_{\vec{n}}(\phi))$ 也可写成矩阵形式：（J^2与J_z的共同$|j,m\rangle$为基矢）→ 不改变j. $\because [\vec{J}\cdot\vec{n}, J^2]=0$

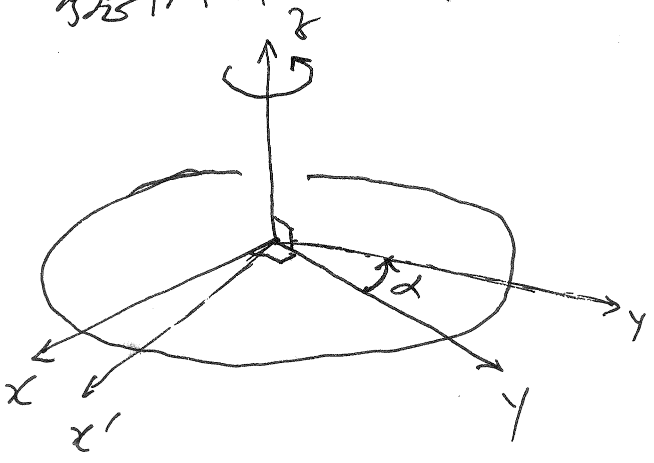
$$D^{(j)}_{m'm}(R) = \langle j,m'| \boxed{e^{-i\frac{\vec{J}\cdot\vec{n}}{\hbar}\phi}} |j,m\rangle$$

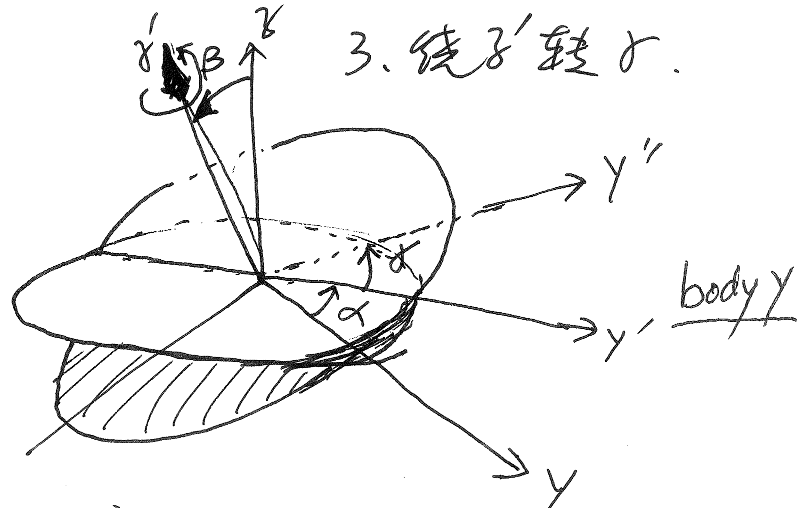
这是(2j+1)×(2j+1)维的矩阵，矩阵元称为Wigner函数。$D^{(j)}_{m'm}(R)$ 称为 $D(R)$ 的2j+1维不可约表示(irreducible representation)。反过来，对于不确定j的系统，$D(R)$是可约表示。

$$\begin{pmatrix} \boxed{2\times2} & & & \\ & \boxed{3\times3} & & \\ & & \boxed{4\times4} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

• 利用欧拉转动，我们可进一步看清这些表示：任意转动可分三步实现

考虑刚体的转动。 1. 绕 z 转 α。 2、绕 y' 转 β 3、绕 z' 转 γ。





这个转动可写成：$R(\alpha,\beta,\gamma)=R_{z'}(\gamma)\,R_{y'}(\beta)\,R_z(\alpha)$

（轴固定在刚体）

由于 $R_{y'}(\beta)=R_z(\alpha)\,R_y(\beta)\,R_z^{-1}(\alpha)$.

（可由左右两种操作的后果 y' 方向一样，z' 与 z 的夹角 β 一致看出。或者说，两种操作得到的 z' 有一样的 α,β）.

类似地，$R_{z'}(\gamma)=R_{y'}(\beta)\,R_z(\gamma)\,R_{y'}^{-1}(\beta)$

我们推出： $R_{z'}(\gamma)\,R_{y'}(\beta)\,R_z(\alpha)$

$$=R_{y'}(\beta)\,R_z(\gamma)\,\underline{R_{y'}^{-1}(\beta)\,R_{y'}(\beta)}\,R_z(\alpha)$$

$$=R_z(\alpha)\,R_y(\beta)\,\underbrace{R_z^{-1}(\alpha)\cdot R_z(\gamma)}_{\text{对易}}\cdot R_z(\alpha)$$

$$=R_z(\alpha)\,R_y(\beta)\,R_z(\gamma)$$

• 这是个固定（空间）坐标系下的转动！ $\boxed{\text{space-fixed}}$

利用 $R(\alpha,\beta,\gamma)=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$，有

$$\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma)=\mathcal{D}_z(\alpha)\mathcal{D}_y(\beta)\mathcal{D}_z(\gamma)$$

$$=e^{-i\frac{J_z\alpha}{\hbar}}\ e^{-i\frac{J_y\beta}{\hbar}}\ e^{-i\frac{J_z\gamma}{\hbar}}$$

对于 $s=\frac{1}{2}$ 系统

$$\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix}e^{-\frac{i\alpha}{2}} & 0\\ 0 & e^{\frac{i\alpha}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2}\\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\frac{i\gamma}{2}} & 0\\ 0 & e^{i\gamma/2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{-i\frac{(\alpha+\gamma)}{2}}\cos\frac{\beta}{2}, & -e^{-i\frac{(\alpha-\gamma)}{2}}\sin\frac{\beta}{2}\\ e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}\sin\frac{\beta}{2}, & e^{i\frac{(\alpha+\gamma)}{2}}\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}$$

利用 R 与 $\mathcal{D}$ 的对应：

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)=\langle j,m'|e^{-i\frac{J_z\alpha}{\hbar}}\cdot e^{-i\frac{J_y\beta}{\hbar}}\cdot e^{-i\frac{J_z\gamma}{\hbar}}|jm\rangle$$

$$=e^{-i(m'\alpha+m\gamma)}\langle jm'|e^{-i\frac{J_y\beta}{\hbar}}|jm\rangle$$

$$=e^{-i(m'\alpha+m\gamma)}d^{(j)}_{m'm}(\beta)\leftarrow$$ 非平庸部分