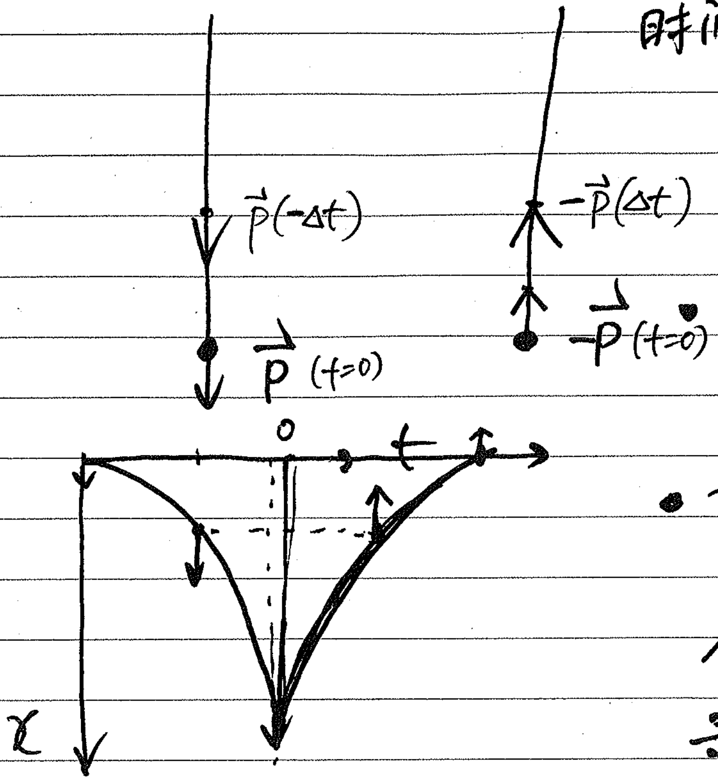
§ 时间反演对称性

"时间反演"不准确，科幻。

"运动反转" reversal of motion 更准确，due to E. Wigner



时间反演对称：

如果在某个时间$(t=0)$，$\vec p$ 变成 $-\vec p$

"粒子按原路返回 → 回到过去"

放录相，正放 倒放都是对的

即都是真实的可能的。

• 前提：没有耗散力（阻尼）

桌面上滑块由于摩擦减速停止，不能相反。（如果你看到录相是相反的，可以判断出来）

要求：$m\ddot{x} = -\nabla V(x)$，如果 $x(t)$ 是解，那么 $x(-t)$ 也是。

比如上面的例子：① $x(t) = vt + \frac{1}{2}gt^2$，$v$ 是 $t=0$ 时速度

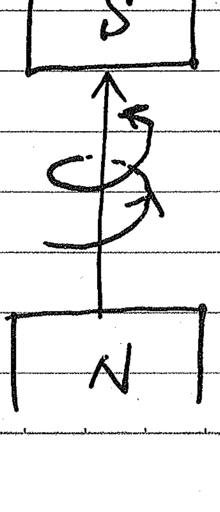
② $x(-t) = -vt + \frac{1}{2}gt^2$ 也是解，$-v$ 是 $t=0$ 时速度。

解①在 $-t$ 等于解②在 t → 随着时间的流逝，回到过去

• 有磁场的情况

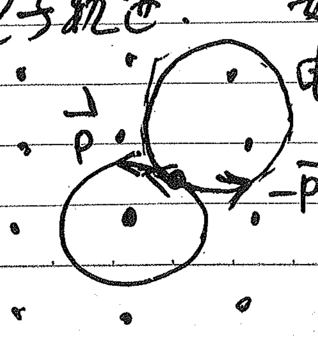
$$\vec F = q\vec v \times \vec B + q\vec E$$

没有"运动反转"对称性！

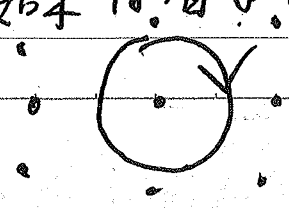


电子轨迹。如果在某时刻 $\vec p \to -\vec p$

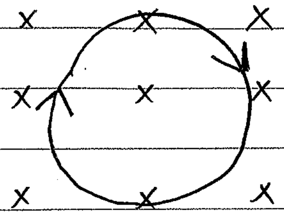
电子并不原路返回。



如果你看录相，放反了！



然而，从侧观角度看，如果产生磁场的电流也反向，那么



还是对的！ 时间反演对称性还在！

取决于你怎么看.

• 量子力学情形

$$\left[\begin{aligned}&i\hbar\frac{\partial\psi_\alpha(x,t)}{\partial t}=H\psi_\alpha(x,t)\Rightarrow -i\hbar\frac{\partial\psi_\alpha^*(x,t)}{\partial t}=H\psi_\alpha^*(x,t)\\&\Rightarrow -i\hbar\frac{\partial\psi_\alpha^*(x,-t)}{\partial(-t)}=H\psi_\alpha^*(x,-t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_\alpha^*(x,-t)\end{aligned}\right]$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+V\right)\psi=H\psi$$

$\Rightarrow \psi_\alpha(x,t)=\psi_\alpha^*(x,-t)$ 也是解

如果 $\psi(x,t)=\psi_E(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ 是解，$\psi(x,-t)=\psi_E(x)e^{\frac{iEt}{\hbar}}$

却并不是 S-eq 的解. $\because H\psi_E=E\psi_E$.

然而 $\psi^*(x,-t)=\psi_E^*(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ 是 S-eq 的解.

如果在 $t=0$ 时，波函数 $\psi(x)=\langle x|\alpha\rangle$，那么对应的运动反转态的波函数是 $\psi^*(x)=\langle x|\alpha\rangle^*$.

什么意思？ 例：$t=0$ 时 $\psi(x)=\langle x|p\rangle=\frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}}$

$\psi^*(x)=\langle x|p\rangle^*=\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}}$ → 动量反转！

• 数学准备：对称操作.

$R|\alpha\rangle=|\tilde\alpha\rangle,\quad R|\beta\rangle=|\tilde\beta\rangle$

要求 $\langle\tilde\beta|\tilde\alpha\rangle=\langle\beta|R^\dagger R|\alpha\rangle=\langle\beta|\alpha\rangle$，即 $R^\dagger R=1$ 幺正.

可以放松要求：

$|\langle\tilde\beta|\tilde\alpha\rangle|=|\langle\beta|\alpha\rangle|$ 即另一个可能：$\langle\tilde\beta|\tilde\alpha\rangle=\langle\beta|\alpha\rangle^*=\langle\alpha|\beta\rangle$

定义：变换 $|\alpha\rangle\to|\tilde\alpha\rangle=\theta|\alpha\rangle,\ |\beta\rangle\to|\tilde\beta\rangle=\theta|\beta\rangle$

为反幺正(antiunitary)，如果：

$\langle\tilde\beta|\tilde\alpha\rangle=\langle\beta|\alpha\rangle^*$

$\theta(c_1|\alpha\rangle+c_2|\beta\rangle)=c_1^*\theta|\alpha\rangle+c_2^*\theta|\beta\rangle$ → 反线性

反幺正算符可以写成 $\Theta = UK$，其中 $U^{\dagger}U=1$
K：复共轭算符

$$K\, c|\alpha\rangle = c^{*} K|\alpha\rangle$$

若 $|\alpha\rangle = \sum_{a} |a\rangle\langle a|\alpha\rangle$ 那么 ~~$K|\alpha\rangle = \sum_a |a\rangle\langle a|\alpha\rangle$~~

$$|\tilde{\alpha}\rangle = K|\alpha\rangle = \sum_{a} \langle a|\alpha\rangle^{*} K|a\rangle = \sum_{a} \langle a|\alpha\rangle^{*} |a\rangle$$

注意 K 不改变基矢！ 理解：$|a\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，K 无用。

~~理解~~：S_y 本征矢：$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \mp \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$
（依赖于基矢选取）
但是若选 S_y 本征矢为基矢，$K|S_y \pm\rangle = |S_y \pm\rangle$ 不变。

- 证明 $\Theta = UK$ 满足反幺正条件：

回到反线性：
$$\Theta(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle) = UK(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle)$$
$$= c_1^{*} UK|\alpha\rangle + c_2^{*} UK|\beta\rangle$$
$$= c_1^{*}\Theta|\alpha\rangle + c_2^{*}\Theta|\beta\rangle$$

∴ $\Theta = UK$ 满足反线性

内积：
$$|\alpha\rangle \rightarrow |\tilde{\alpha}\rangle = \Theta|\alpha\rangle = \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle^{*} UK|a'\rangle$$

$$= \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle^{*} U|a'\rangle = \sum_{a'} \langle\alpha|a'\rangle U|a'\rangle$$

$$|\tilde{\beta}\rangle = \sum_{a'} \langle a'|\beta\rangle^{*} U|a'\rangle \xleftrightarrow{DC} \langle\tilde{\beta}| = \sum_{a'} \langle a'|\beta\rangle\langle a'|U^{\dagger}$$

$$\therefore \langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \sum_{a''}\sum_{a'} \langle a''|\beta\rangle\langle a''|U^{\dagger}U|a'\rangle\langle\alpha|a'\rangle$$

$$= \sum_{a'} \langle\alpha|a'\rangle\langle a'|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle$$

- 满足第一条
- Θ 朝右作用到 ket
不能朝左！

• 时间反演算符：Θ

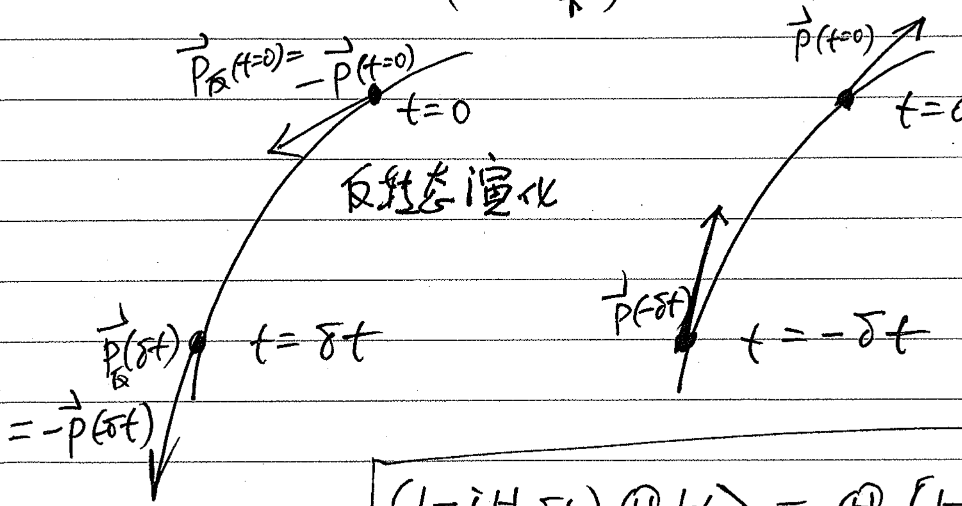
考虑 $|\alpha\rangle \to \Theta|\alpha\rangle$ ← 反演态，或运动反转态.

比如：$|p\rangle$　　$\Theta|p\rangle = |-p\rangle$

设 $t=0$ 时系统处于 $|\alpha\rangle$，~~[illegible]~~ 由 $|t=-\delta t\rangle$ 演化而来

即：$|\alpha, \cancel{\ }\rangle = \left(1 - \frac{iH}{\hbar}\delta t\right) \cancel{\ } |t=-\delta t\rangle$　　$\boxed{即\ |-\delta t\rangle = \left(1 + \frac{iH}{\hbar}\delta t\right)|\alpha\rangle}$

如果时间反演不变，那么 $\left(1 - \frac{iH\delta t}{\hbar}\right)\Theta|\alpha\rangle$ 应该与 $\Theta|t=-\delta t\rangle$ 相同.



$$\boxed{\left(1 - \frac{iH}{\hbar}\delta t\right)\Theta|\alpha\rangle = \Theta\left[1 - \frac{iH}{\hbar}(-\delta t)\right]|\alpha\rangle}$$

$$\Rightarrow\ -iH\Theta|\alpha\rangle = \Theta iH|\alpha\rangle \text{ — ☆}$$

• Θ 不幺正. 若幺正，可约去 i $\Rightarrow$ $\boxed{-H\Theta = \Theta H}$ —(A).

对于能量本征态 $|n\rangle \Rightarrow H\Theta|n\rangle = -\Theta H|n\rangle = (-E_n)\Theta|n\rangle$.

对于自由粒子，这是不允许的，$\because E_n > 0$.

另一角度：$H = \frac{p^2}{2m}$，(A) $\Rightarrow \Theta^{-1}\underbrace{H}_{=\frac{p^2}{2m}}\Theta = -\frac{p^2}{2m}$ 不可能.

出路：

• Θ 反幺正：$\Theta iH|\alpha\rangle = -i\Theta H|\alpha\rangle$　即 $\Theta = UK$，其中 $U^\dagger U = 1$，K 为复共轭算符

对比☆式：$\Rightarrow \because$ $\boxed{H\Theta = \Theta H} \to \Theta^{-1}H\Theta = H$

• 注意：$\langle\beta|\Theta|\alpha\rangle = \langle\beta|\cdot(\Theta|\alpha\rangle) \neq \underbrace{(\langle\beta|\Theta)}_{朝左没有定义}\cdot|\alpha\rangle$

• 时间反演下算符的行为：奇还是偶

定理：$\langle\beta|A|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta A^{+}\Theta^{-1}|\tilde{\beta}\rangle$ 其中 $|\tilde{\alpha}\rangle = \Theta|\alpha\rangle$

其中 A 是线性算符. $|\tilde{\beta}\rangle = \Theta|\beta\rangle$

证明：定义 $|\gamma\rangle \equiv A^{+}|\beta\rangle$，那么 $\langle\gamma| = \langle\beta|A$

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle = \langle\gamma|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\tilde{\gamma}\rangle \quad \leftarrow \text{反幺正}$$
$$= \langle\tilde{\alpha}|\Theta A^{+}|\beta\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta A^{+}\Theta^{-1}\Theta|\beta\rangle$$
$$= \langle\tilde{\alpha}|\Theta A^{+}\Theta^{-1}|\tilde{\beta}\rangle$$

当 $A^{+}=A$，$\Rightarrow \langle\beta|A|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta A\Theta^{-1}|\tilde{\beta}\rangle$

对比 $\langle\beta|A|\alpha\rangle = \langle\tilde{\beta}|UAU^{+}|\tilde{\alpha}\rangle$.

• 我们称 A 是奇(odd). 若 $\Theta A\Theta^{-1} = -A$，

偶 若 $\Theta A\Theta^{-1} = A$.

于是有：反转态性质：$\boxed{\langle\beta|A|\alpha\rangle = \pm\langle\tilde{\alpha}|A|\tilde{\beta}\rangle = \pm\langle\tilde{\beta}|A|\tilde{\alpha}\rangle^{*}}$ $\to$ 矩阵元

对于 $|\beta\rangle = |\alpha\rangle$

$\boxed{\langle\alpha|A|\alpha\rangle = \pm\langle\tilde{\alpha}|A|\tilde{\alpha}\rangle}$ $\longrightarrow$ 期望值.

例：应有：$\langle\alpha|\vec{p}|\alpha\rangle = -\langle\tilde{\alpha}|\vec{p}|\tilde{\alpha}\rangle$.

那么 $\Theta\vec{p}\Theta^{-1} = -\vec{p}$，奇

另一角度看：$\vec{p}\,\Theta|\vec{p}'\rangle = -\Theta\vec{p}\Theta^{-1}\Theta|\vec{p}'\rangle = -\vec{p}'\,\Theta|\vec{p}'\rangle$

$\Rightarrow |\vec{p}'\rangle$ 的反转态是 $|-\vec{p}'\rangle$，与之前讨论 S-eq 一致.

类似地，我们预计 $\langle\alpha|\vec{x}|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\vec{x}|\tilde{\alpha}\rangle$

那么 $\Theta\vec{x}\Theta^{-1} = \vec{x}$，even.

$\vec{x}\,\Theta|\vec{x}'\rangle = \vec{x}'\,\Theta|\vec{x}'\rangle \implies \Theta|x'\rangle = |x'\rangle$

任意态

对易关系：$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ $\Rightarrow$ $[x_i, p_j]|\alpha\rangle = i\hbar\delta_{ij}|\alpha\rangle$

$\Rightarrow \Theta[x_i, p_j]\Theta^{-1}\Theta|\alpha\rangle = \Theta\, i\hbar\delta_{ij}|\alpha\rangle = -i\hbar\delta_{ij}\Theta|\alpha\rangle$

即 $\Rightarrow$ 左= $[x_i, -p_j]\Theta|\alpha\rangle = -i\hbar\delta_{ij}\Theta|\alpha\rangle$ ∴对易关系对反转态不变！

这都是 Θ 是反幺正！

要保证 $[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$ 不变，须 $\boxed{\Theta J \Theta^{-1} = -J}$

证明：$\Theta [J_i, J_j] \Theta^{-1} \underline{\Theta |\alpha\rangle} = -i\hbar\varepsilon_{ijk} \underline{\Theta J_k \Theta^{-1}} \underline{\Theta |\alpha\rangle}$

$$[J_i, J_j]\ \Theta|\alpha\rangle = i\hbar\varepsilon_{ijk} J_k\ \Theta|\alpha\rangle$$

对轨道角动量，容易理解．$\vec{J} = \vec{x} \times \vec{p}$