

物理上, 对粒子运动的描述给出的可观测结果要与规范无关.
称为 gauge invariant.

~~我们首先发现~~ 不同规范下, S_{eq} 解不同. 但有简单变换^{同样}

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\frac{qA(x)}{\hbar c}} \psi(x) \quad (\text{变换表象: } \psi(x) = \langle x | \alpha \rangle).$$

$$\text{即相差一个相因子 } e^{i\frac{qA(x)}{\hbar c}}, \quad \text{即分别对应 } |\alpha\rangle \text{ 与 } g|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle.$$

$\uparrow$ x' 是 x 的对应

$$\text{证明: 左: } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (e^{i\frac{qA}{\hbar c}} \psi) = -\frac{q}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \psi' + e^{i\frac{qA}{\hbar c}} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

(" " 不是求导).

$$\begin{aligned} \text{右1: } (-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \vec{A}') (e^{i\frac{qA}{\hbar c}} \psi) &= (\frac{q}{c} \nabla A) \psi' + e^{i\frac{qA}{\hbar c}} (-i\hbar \nabla) \psi \\ &\quad + (-\frac{q}{c} \vec{A}') e^{i\frac{qA}{\hbar c}} \psi - (\frac{q}{c} \nabla A) e^{i\frac{qA}{\hbar c}} \psi \\ &= e^{i\frac{qA}{\hbar c}} (-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \vec{A}) \psi \end{aligned}$$

$$(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \vec{A}')^2 (e^{i\frac{qA}{\hbar c}} \psi) = e^{i\frac{qA}{\hbar c}} (-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \vec{A})^2 \psi$$

$$\text{右2: } q(\phi - \frac{\partial A}{\partial t}) (e^{i\frac{qA}{\hbar c}} \psi) = e^{i\frac{qA}{\hbar c}} (q\phi - \frac{q}{c} \frac{\partial A}{\partial t}) \psi$$

$$\text{由 } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \vec{A})^2 \psi + q\phi \psi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (e^{i\frac{qA}{\hbar c}} \psi) &= \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \vec{A}')^2 (e^{i\frac{qA}{\hbar c}} \psi) \\ &\quad + q(\phi - \frac{\partial A}{\partial t}) (e^{i\frac{qA}{\hbar c}} \psi) \end{aligned}$$

• 也可以不借助表象证明.

虽然规范不同，波函数不同，但是

① ρ 并不变. $|\psi|^2 = |e^{i\frac{qA}{\hbar c}} \psi|^2$

② 不改变几率流 $\psi' = N\rho e^{i\frac{S'}{\hbar}}$, $S = S' + \frac{qA}{c}$

$$\begin{aligned}\vec{j}' &= \frac{\rho}{m} (\nabla S' - \frac{q}{c} \vec{A}') \\ &= \frac{\rho}{m} (\nabla S + \frac{q}{c} \nabla A - \frac{q}{c} \vec{A} - \frac{q}{c} \nabla A) \\ &= \vec{j}\end{aligned}$$

③ $\vec{x}$ 与 $\vec{\pi}$ 的期望值不变. (从坐标表象证明).

$$\langle \vec{x} \rangle = \int d^3x \psi'^* \vec{x} \psi' = \int d^3x \psi^* \vec{x} \psi$$

$$\begin{aligned}\langle \frac{\vec{\pi}}{m} \rangle &= \frac{1}{m} \int d^3x \psi^* (\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}) \psi = \int d^3x \frac{1}{2m} (\psi^* \vec{\pi} \psi + \psi \vec{\pi}^* \psi^*) \\ &= \int d^3x \vec{j} = \int d^3x \vec{j}'\end{aligned}$$

(利用了厄密性)
(另一种证明)

以上物理量都称为“规范不变”: gauge invariant.

(以上讨论仅限于坐标表象. 下面我们来更一般地描述量子力学下的 gauge invariant.)

§ 磁单极子 magnetic monopole

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

如果 $\nabla \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_m$ 就完美对称了!

ρ_m 是 e_m 密度, e_m 为磁荷 或 磁单极子

那磁场也有源(Source)了.

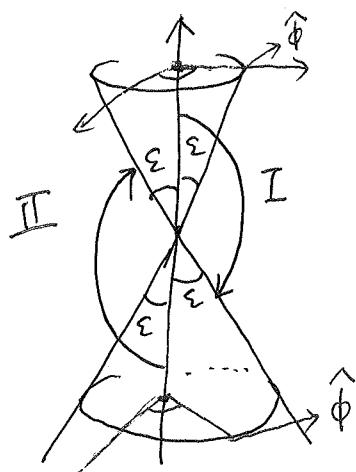
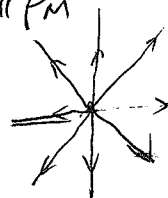
量子力学(目前)并不预言(需要) e_m .

但是, 如果它存在, 量子力学要求 e_m 是由 e, h, c 决定, 因此是量子化的.

证明: 假设有一个 e_m , 位于原点, 由 $\nabla \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_m$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{e_m}{r^2} \hat{r}$$

用矢量 $\vec{A}$ 描述它: $\vec{A} = \frac{e_m (1 - \cos\theta)}{r \sin\theta} \hat{\phi}$



$$\begin{aligned} \therefore \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{\theta} \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi} \\ &= \vec{B} \end{aligned} \quad (3)$$

但是有问题： $\vec{A}$ 在 z 轴 发散！(称为奇点 singular)

可以理解，如果 $\vec{A}$ 不奇异 则 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$.

想描述靠近 z 轴 的 $\vec{B}$ ，需要

我们放弃 $\vec{A}$ 单一的要求。取

$\Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV = 0$
与 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 4\pi$ 矛盾。
不可能构造出非奇异的 $\vec{A}$ ，使得
 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 处处成立 (且 $\vec{B} = \frac{e_m}{r^2} \hat{r}$)

$$\vec{A}^{(I)} = \frac{e_m (1 - \cos\theta)}{r \sin\theta} \hat{\phi} \quad \text{当 } 0 < \theta < \pi - \varepsilon$$

$$\vec{A}^{(II)} = - \frac{e_m (1 + \cos\theta)}{r \sin\theta} \hat{\phi} \quad \text{当 } \theta > \varepsilon \quad (\vec{A}^{(I)} \text{ 在 } z \text{ 轴 发散})$$

在重叠区域， $\vec{A}^{(I)}$ 与 $\vec{A}^{(II)}$ 任意选 (规范变换)

$$\vec{A}^{(II)} - \vec{A}^{(I)} = - \frac{2e_m \hat{\phi}}{r \sin\theta} = \nabla \Lambda$$

$$\text{利用 } \nabla \Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\therefore \Lambda = -2e_m \phi \quad (\text{此 } \phi \text{ 为角度}) \quad \vec{A} \text{ 取 } \vec{A}^{(I)}$$

考虑一个带 e 粒子 在 $\vec{B} = \frac{e_m}{r^2} \hat{r}$ 中的波函数，记为 $\psi^{(I)}(\vec{r}, t)$

$$\text{当 } \vec{A} \text{ 取 } \vec{A}^{(II)} \quad \boxed{\psi^{(II)} = e^{-\frac{2iee_m\phi}{\hbar c}} \psi^{(I)}}, \quad (1) \quad \left(\psi' = e^{\frac{ie\Lambda}{\hbar c}} \psi \right)$$

波函数 $\psi^{(II)}$ 与 $\psi^{(I)}$ 必须单值^{*}，取 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，固定 r

$$\Rightarrow \psi^{(I)}(r, \frac{\pi}{2}, 0) = \psi^{(I)}(r, \frac{\pi}{2}, 2\pi) \quad (2) \quad \text{周期 } 2\pi \text{ in } \phi$$

* 单值：同一规范下，一个位置只有唯一值。

我们看到

$$\text{由(1)得: } \psi^{(II)}(r, \frac{\pi}{2}, 0) = \psi^{(I)}(r, \frac{\pi}{2}, 0) \text{ ——— (3)}$$

$$\begin{aligned} \text{同样由(1): } \psi^{(II)}(r, \frac{\pi}{2}, 2\pi) &= e^{-\frac{4ieem\pi}{\hbar c}} \psi^{(I)}(r, \frac{\pi}{2}, 2\pi) \\ &= e^{-\frac{4ieem\pi}{\hbar c}} \psi^{(II)}(r, \frac{\pi}{2}, 0) \end{aligned} \quad \downarrow \text{由(2)+(3)}$$

$$\therefore \frac{2eem}{\hbar c} = \pm n, \quad n=0, \pm 1, \dots$$

$$\therefore e_m = \frac{\hbar c}{2e} \times n,$$

$$\boxed{\frac{\hbar c}{2e^2} e = \frac{137}{2} e} \quad \text{一个单位磁荷}$$

这就是磁量子化

$\frac{\hbar c}{e^2}$ 精细结构常数。

历史: 1931, Dirac

1968, T.T. Wu and C.N. Yang.