

一种特殊的规范变换: $\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$, $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda$

$V(\vec{r}) = q\phi(\vec{r})$, 改变势能零点: $V(\vec{r}) \rightarrow V'(\vec{r}) = V(\vec{r}) + V_0$.

可由规范变换: $\frac{q\Lambda}{c} = -V_0 t$ 得到 $\therefore \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \frac{V_0}{q}$, $\nabla \Lambda = 0$.

$$H \rightarrow H' = H + V_0$$

设 $t=0$ 时 初态制备为 $|\alpha(0)\rangle$, 新规范 $|\alpha'(0)\rangle = e^{\frac{i q \Lambda}{\hbar c}} |\alpha(0)\rangle = |\alpha(0)\rangle$

计算态矢的时间演化.

$$|\alpha'(t)\rangle = e^{-i \frac{H' t}{\hbar}} |\alpha(0)\rangle = e^{-i \frac{(H+V_0) t}{\hbar}} |\alpha(0)\rangle$$

$$= e^{-i \frac{V_0 t}{\hbar}} |\alpha(t)\rangle \quad \because [V_0, H] = 0$$

于是 $|\alpha'(t)\rangle = e^{\frac{i q \Lambda}{\hbar c}} |\alpha(t)\rangle$, 此时 $\frac{q\Lambda}{c} = -V_0 t$

$|\alpha(0)\rangle$ 可展开成 $|E\rangle$ 叠加. $H|E\rangle = E|E\rangle$,

$$|\alpha(0)\rangle = \sum_E C_E |E\rangle \Rightarrow |\alpha(t)\rangle = \sum_E C_E e^{-i \frac{E t}{\hbar}} |E\rangle$$

$$|\alpha'(t)\rangle = \sum_E C_E e^{-i \frac{E+V_0 t}{\hbar}} |E\rangle$$

任意力学量 Q , 计算其期望值

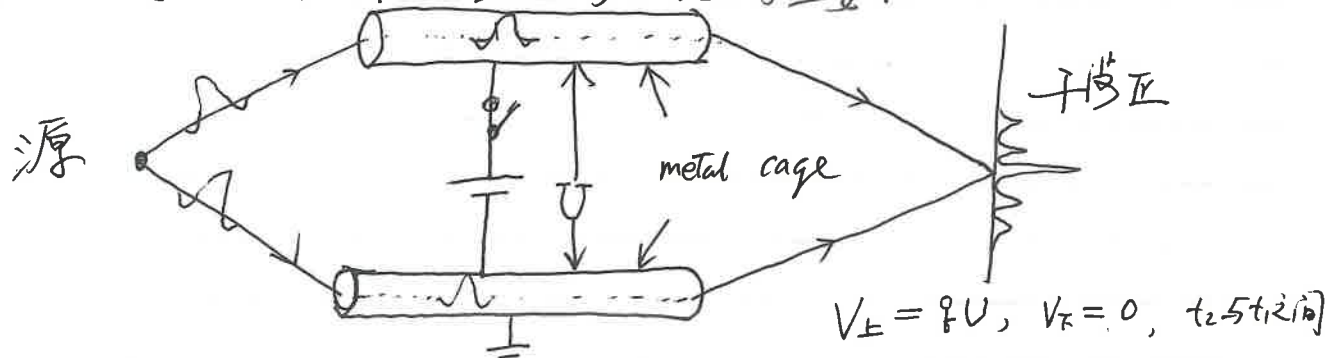
$$\langle Q \rangle = \sum_{E, E'} C_E^* C_{E'} \langle E' | Q | E \rangle e^{-i \frac{E-E'}{\hbar} t} \quad \text{与 } V_0 \text{ 无关.}$$

• 甚至可以让 V_0 随 t 变化: $V_0(t)$.

$$|\alpha'(t)\rangle = e^{-i \int_0^t d\tau \frac{V_0(\tau)}{\hbar}} |\alpha(t)\rangle, \quad \langle Q \rangle \text{ 仍与 } V_0 \text{ 无关!}$$

尽管 V 的绝对大小可任意选择 (通过 V_0), 势能之差 (在不同地点) 是可测的. 即使不改变 $\vec{E}$.

考忠实验: 经典物理: $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 不变才重要.



带电粒子波包远小于 cage 的长度, 进入 cage 后 通电, 出去前 断电
 t_1 时刻 t_2 时刻

在粒子路径上始终 $V(x)$ 均匀 $\Rightarrow \vec{E} = 0$, 经典看粒子不受力
 运动不受影响.

但量子力学: 有对称点 (干涉区). 两条路径有相位差

$$\Delta\phi = \phi_{\text{上}} - \phi_{\text{下}} = \frac{1}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt (V_{\text{上}} - V_{\text{下}}) = \frac{-qU}{\hbar} (t_2 - t_1)$$

(用到粒子的动能不变). $\Delta\phi$ 随 U 的调节变, 干涉相长或消.

- 量子力学粒子 "同时" "出现" 在两个地方, 感受到 ϕ 的不同!
- 电势 ϕ 比 $\vec{E}$ 更本质.
- 若 $q \rightarrow 0$, 无法实验, 干涉持平.

第6讲

§ 圆环上带电粒子的运动与磁通

我们研究一个圆环上带电荷 q 的粒子. 环内有一根

无限长螺线管穿过, 半径 a , 通电后:

内部: $\vec{B} = B\hat{z}$, 外部: $\vec{B} = 0$

$r \leq a$: $\vec{A} = \frac{r}{2} B\hat{\phi}$, $r > a$: $\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi}$, $\Phi = B\pi a^2$

验证: $\int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$

由于轴对称: $\begin{cases} B \pi r^2 = A \cdot 2\pi r & \leftarrow r \leq a \\ B \pi a^2 = A \cdot 2\pi r & \leftarrow r > a \end{cases}$

在没有通电时, $\vec{B} = 0$ 全空间

$H = \frac{L_z^2}{2\mu R^2} \equiv \frac{P_\phi^2}{2\mu}$, $P_\phi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{L_z}{R}$, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$
 (二维: $-\hbar^2 \nabla^2 = P_\phi^2 + \frac{L_z^2}{\rho^2}$)
 但圆环没有径向, P_ρ

H 本征态

$\psi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} e^{im\phi}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$E_m = \frac{m^2 \hbar^2}{2\mu R^2}$

$\psi_m(\phi) = \psi_m(\phi + 2\pi)$

通电后: 圆环上并没有 $\vec{B}$, 但 $\vec{A} \neq 0$.

$\hat{H} = \frac{1}{2\mu} (P_\phi - \frac{q}{c} A_\phi)^2$ 注: $\vec{P} = P_\phi \hat{e}_\phi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$

$= \frac{1}{2\mu} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{q\Phi}{c 2\pi R} \right)^2$

$= \frac{-\hbar^2}{2\mu R^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{i q \Phi}{\hbar c} \right)^2$

$\frac{\hbar c}{q}$: 磁通量子
量纲.

求解能量本征方程

$$H \psi(\varphi) = E \psi(\varphi)$$

引入试探解 $\psi(\varphi) = \bar{\Psi}(\varphi) e^{\frac{i q \Phi}{\hbar c} \varphi}$

由于 $(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{i q \Phi}{\hbar c}) \bar{\Psi}(\varphi) e^{\frac{i q \Phi}{\hbar c} \varphi} = (\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \varphi}) e^{\frac{i q \Phi}{\hbar c} \varphi}$

本征方程化为

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \bar{\Psi}(\varphi) = E \bar{\Psi}(\varphi)$$

解为 $\bar{\Psi}(\varphi) = e^{i m' \varphi}$

$$E = \frac{m'^2 \hbar^2}{2\mu R^2}$$

直接设 $\psi(\varphi) = \frac{e^{i m \varphi}}{\sqrt{2\pi}}$

也可以

$$(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{i q \Phi}{\hbar c}) e^{i m \varphi} = i(m - \frac{q \Phi}{\hbar c}) e^{i m \varphi}$$

$$E = (m - \frac{q \Phi}{\hbar c})^2 \frac{\hbar^2}{2\mu R^2}$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \leftarrow \text{由周期性}$$

$\bar{\Psi}(\varphi)$ 本身并不是波函数, $\psi(\varphi) = \bar{\Psi}(\varphi) e^{\frac{i q \Phi}{\hbar c} \varphi}$ 才是

$\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$ 是波函数单值的结果

因此 $m' + \frac{q \Phi}{\hbar c}$ 是整数, 定义为 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

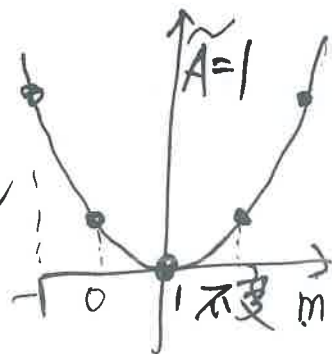
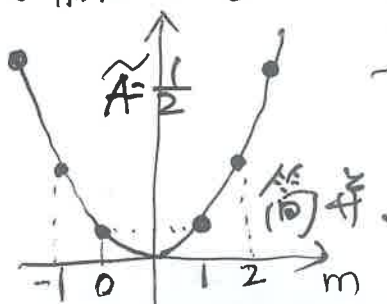
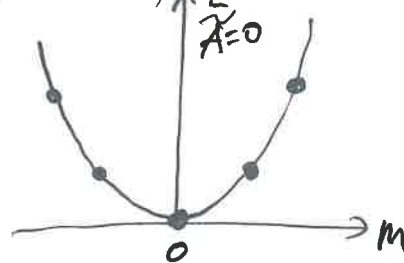
• 能量本征函数 $\psi_E(\varphi) = \frac{e^{i m \varphi}}{\sqrt{2\pi R}}$, $\frac{m \hbar}{R}$ 是机械动量值

但是注意 $E_m = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} m'^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} (m - \frac{q \Phi}{\hbar c})^2$

能谱发生了移动: $m=0$ 的能级 $\uparrow$

(按 $\frac{q \Phi}{\hbar c}$ 的强弱) $m=1, -1$ 的能级分裂 $\uparrow \downarrow$

$$\tilde{A} = \frac{q \Phi}{\hbar c}$$



(2)

设想 $t=0$ 时, 不通电, 电子处于 $E_{m=0} = \frac{m^2 \hbar^2}{2\mu R^2} = 0$ 的能级 $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$

后慢慢增加螺线管电流, 电子仍然处于 $\psi_{m=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$ 态 $\leftarrow$ 绝热定理

但是能量 $E = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \frac{q^2 \Phi^2}{\hbar^2 c^2}$, 上升, m' 决定,

机械角动量: $R(P_\phi - \frac{qA_\phi}{c}) = m'\hbar$ 提升了

* 在没有 B 的地方, 系统能通过 A “感觉”到远处的磁通!

此效应称为“定态”AB效应 (Aharonov-Bohm effect)

• $\chi=1$ 的基态 $\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2\pi R}} = \psi_{m=1}$, 机械动量 $\pi_\phi = P_\phi - \frac{qA}{c} = 0$.