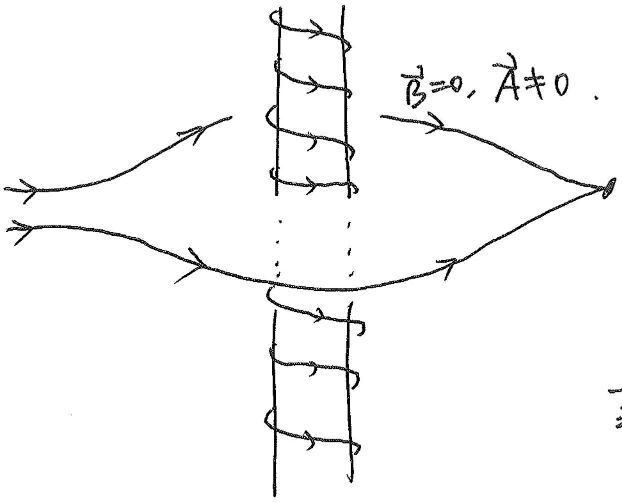
2022补充

§ AB效应，非定态：一个带电粒子在$\vec{B}=0$的区域运动。($\phi=0$同时).



S-eq：

$$\frac{1}{2\mu}\left(-i\hbar\nabla-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2\psi(\vec{r},t)=i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t}$$
$$+V\psi(\vec{r},t)$$

假设 $\psi(\vec{r})=e^{ig(\vec{r})}\psi'(\vec{r})$

其中 $g(\vec{r})=\frac{q}{\hbar c}\int_{O}^{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,'$

O是坐标原点(或任意参照点)

注意：在积分区域内，有$\nabla\times\vec{A}=0$，否则$g(\vec{r})$依赖于积分路径. $\int_{Ol_1}^{\vec{r}}\vec{A}\cdot d\vec{r}\,'=\int_{Ol_2}^{\vec{r}}\vec{A}\cdot d\vec{r}\,'\Rightarrow\oint\vec{A}\cdot d\vec{r}\,'=0$

(也就是要绕开$\vec{B}\neq 0$的地方)

$$\nabla\psi=e^{ig}(i\nabla g)\psi'+e^{ig}(\nabla\psi')$$

$g\to\frac{q\Lambda}{\hbar c}$, $\vec{A}=0+\nabla\Lambda$

由于 $\nabla g=\frac{q}{\hbar c}\vec{A}$，($\vec{A}$是个梯度场) e^{ig}就是$e^{\frac{iq\Lambda}{\hbar c}}$!

通过g，消去$\vec{A}$！

$$\left(-i\hbar\nabla-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\psi=-i\hbar\, e^{ig}(\nabla\psi')$$

$$\left(-i\hbar\nabla-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2\psi=-\hbar^2e^{ig}\,\nabla^2\psi'$$

代回S-eq：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi'+V\psi'=i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}$$

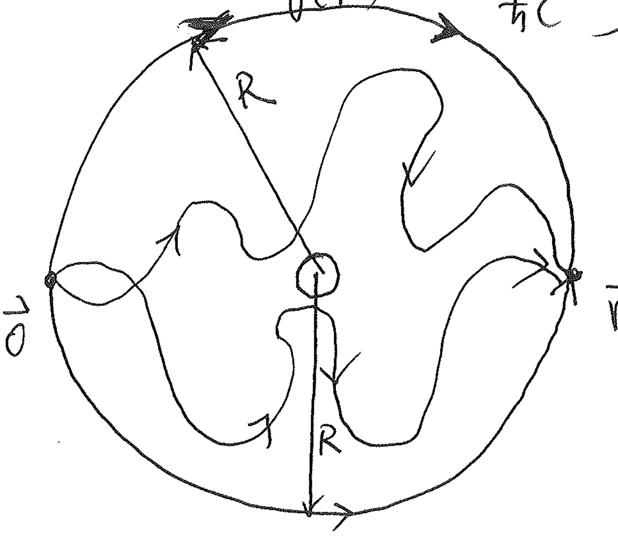
这是一个没有$\vec{A}$的S-eq，$\vec{A}$的效果：$\psi=e^{ig}\psi'$

Aharonov and Bohm：电子分成两束，再汇合（设为$\vec r$处）。电子束包围螺线管，保证 $\vec B=0$，但是 $\vec A\neq 0$，（但 $\nabla\times\vec A=0$）。

两束电子的 $g(\vec r)$ 不同：

顺着 $\vec A$ 的一束：把参考点设在 $\vec 0$ 处，原点在螺线管中心

$$g(\vec r) = \frac{q}{\hbar c}\int_{\vec 0}^{\vec r}\vec A(\vec r')\cdot d\vec r' , \quad \vec A(\vec r') = \frac{\Phi}{2\pi r'}\hat\phi$$



螺线管下方任意路径积分都为（$\because \oint\vec A\cdot d\vec l = \int(\nabla\times\vec A)\cdot d\vec S$）

$$g_{down}(\vec r) = \frac{q}{\hbar c}\int_0^{\pi}\frac{\Phi}{2\pi R}\hat\phi\cdot R\hat\phi\, d\phi$$

$$= \frac{q\Phi}{2\hbar c} = \pi\frac{\Phi}{(\frac{hc}{q})}$$

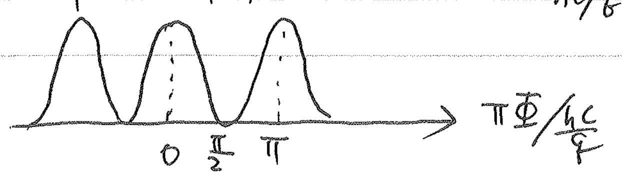
螺线管上方任意路径：$g_{up}(\vec r) = -\frac{q\Phi}{2\hbar c} = -\pi\frac{\Phi}{(\frac{hc}{q})}$

在汇合处 $\vec r$：$\psi(\vec r,t) = \psi_{up}(\vec r,t) + \psi_{down}(\vec r,t)$

考虑$\vec r$的对称性，上下两束所解出的 ψ' 是一样的。（假设 $t=0$ 时，ψ' 一样）

$$\psi(\vec r,t) = \psi'(e^{ig_{up}} + e^{ig_{down}}) = \psi' e^{-i\pi\frac{\Phi}{hc/q}}\left(1+e^{i2\pi\frac{\Phi}{hc/q}}\right)$$

$$|\psi(\vec r,t)|^2 = 2|\psi'|^2\left(1+\cos\left[2\pi\frac{\Phi}{hc/q}\right]\right) = 4|\psi'|^2\cos^2\left(\pi\frac{\Phi}{\frac{hc}{q}}\right)$$



调整螺线管电流，改变 Φ，可在 $\vec{r}$ 处观察到干涉条纹的移动，这就是著名的 AB 效应：电子能感觉到 $\vec{A}$ 的存在，即使 $\vec{B}=0$。

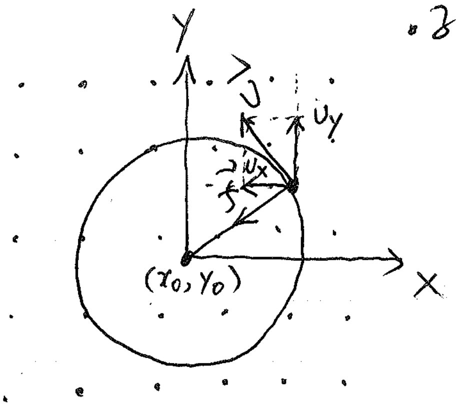
但是注意：Φ 是完全由 $\vec{B}$ 决定的！

文献：实验：R. G. chambers phys. Rev. Lett. 5, 3 (1960)

理论：A and B. phys. Rev 115, 485 (1959).

§ 朗道能级 (Landau Level)

电子在z方向均匀磁场中运动



经典: 圆周运动 $q=-e$

$$\vec{f} = -e\frac{\vec{v}\times\vec{B}}{c}$$

加速度大小 $\frac{v^2}{r}$

$r=\frac{\mu c}{eB}v$, 周期 $\frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\mu c}{eB}$ 与v无关

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{eB}{\mu c}$$

$v_x = -v\sin(\omega_c t)$, $v_y = v\cos(\omega_c t)$ 取 $t=0$ 时 $v_x=0, v_y=v$

$\frac{dx}{dt} = v_x \Rightarrow x = \frac{+v_y}{\omega_c} + x_0$ guiding center

$\frac{dy}{dt} = v_y \Rightarrow y = \frac{-v_x}{\omega_c} + y_0$ (x_0, y_0)

谐振子 中心位置 $x_0 = x - \frac{\pi_y}{\mu\omega_c}$, $y_0 = y + \frac{\pi_x}{\mu\omega_c}$

$$\mu\frac{dv_x}{dt} = -\frac{eBv_y}{c} = -\mu\omega_c^2(x-x_0)$$

← 分解成两个谐振子

$$\mu\frac{dv_y}{dt} = \frac{eBv_x}{c} = -\mu\omega_c^2(y-y_0)$$

频率 ω_c, 平衡位置 $(x_0, y_0) \longrightarrow$ 可在平面内任何位置

量子力学:

$$H=\frac{\pi_x^2+\pi_y^2}{2\mu},\qquad \vec{\pi}=\vec{p}-\frac{q\vec{A}}{c}$$

$$[\pi_x,\pi_y]=\frac{i\hbar q}{c}B,\qquad [\pi_x,\pi_x]=[\pi_y,\pi_y]=0.$$

定义 $X=\frac{c}{qB}\pi_x,\quad P=\pi_y$

则 $[X,P]=i\hbar,\quad [X,X]=[P,P]=0.$

则 $H=\frac{P^2}{2\mu}+\frac{1}{2\mu}\left(\frac{qB}{c}\right)^2X^2=\frac{P^2}{2\mu}+\frac{\mu}{2}\omega_c^2X^2.$

于是谐振子的哈密顿量! 代数: a 与 a^+

能级为 $E_n=\hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $n=0,1,2,\cdots$

对应的本征函数是什么? 采用求解本征方程的方法.

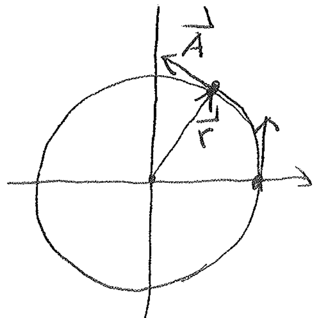
首先写出 $\vec{A}$, 两种常用规范

① Landau gauge: $A_x=-BY,\ A_y=A_z=0.$

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \partial x & \partial y & \partial z\\ -BY & 0 & 0\end{vmatrix}=B\hat{k}$$

② 对称 gauge: $\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}=\left(-\frac{1}{2}BY,\frac{1}{2}Bx,0\right)$

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \partial x & \partial y & \partial z\\ -\frac{BY}{2} & \frac{Bx}{2} & 0\end{vmatrix}=B\hat{k}$$



③ 关系 $\nabla\Lambda=\left(\frac{1}{2}BY,\frac{1}{2}Bx,0\right)$ $\quad\nabla\times\nabla\Lambda=0.$

首先在 Landau Gauge 下讨论.

$$H=\frac{1}{2\mu}\left[\left(P_x-\frac{eB}{c}y\right)^2+P_y^2+P_z^2\right]$$

• z 方向特殊. 设 $\psi(x,y,z)=\psi(x,y)e^{ik_z z}$

$[P_z, H]=0$ P_z的本征值 $P_z'=\hbar k_z$, 好量子数 k_z

$$E_z=\frac{\hbar^2k_z^2}{2\mu}$$

$$H=H_{xy}+H_z$$

$$=\frac{1}{2\mu}\left[\left(P_x-\frac{eB}{c}y\right)^2+P_y^2\right]+\frac{P_z^2}{2\mu}$$

① $\boxed{H_{xy}\psi_{E_{xy}}(x,y)=E_{xy}\psi_{E_{xy}}(x,y)}$, $E=E_{xy}+E_z$

• H_{xy} 中没有 x 分量坐标 $\Rightarrow [P_x, H_{xy}]=0$

完全集 (P_x, H) (以下 E_{xy} 简写为 E)

设 $\psi_{E,k_x}(x,y)=e^{ik_x x}\phi(y)$

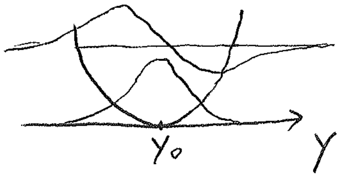
$\because \hat{P}_x e^{ik_x x}=\hbar k_x e^{ik_x x}$

$\hbar k_x$ 是 P_x 的本征值, 记为 P_x'

代入①.

$$\frac{1}{2\mu}\left[\left(P_x'-\frac{eB}{c}y\right)^2+\hat{P}_y^2\right]\phi(y)=E\phi(y)$$

令 $Y_0 = \frac{cP_x'}{eB}$, $\omega_c = \frac{eB}{\mu c}$



$$\frac{1}{2\mu}\left[(Y_0-y)^2\frac{e^2B^2}{c^2} - \frac{\hbar^2 d^2}{dy^2}\right]\phi(y) = E\phi(y)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\phi''(y) + \frac{1}{2}\mu\omega_c^2(y-Y_0)^2\phi(y) = E\phi(y)$$

• 此为一维谐振子，中心位置为 Y_0，频率 ω_c

1. ∴ $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_c$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

著名的 Landau Level.

2. 本征函数：

$$\phi_{n,k_x}(y) = N_n e^{-\frac{\alpha^2(y-Y_0)^2}{2}} H_n(\alpha(y-Y_0))$$

$\alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega_c}{\hbar}} = \frac{1}{x_0}$，由于 $Y_0 = \frac{c\hbar k_x}{eB}$ 依赖于 k_x，

∴ $\phi_n(y) \to \phi_{n,k_x}(y)$

$\Rightarrow \psi_{E,k_x}(x,y) = e^{ik_x x}\phi_{n,k_x}(y)$，$Y_0$ 也称 guiding center

$\boxed{l: \text{magnetic length}}$ $\rightarrow$ x_0 也常写作 $l = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$，$Y_0 = k_x l^2$

$\frac{cP_x'}{eB} = Y_0$ 由 k_x 决定 $\Longrightarrow$ 大量简并！

$B = 1T$，$l \approx 2.5\times10^{-8}$ 米

~~3. 假设 $L_x \times L_y$ 周期边界条件~~

$\cancel{e^{ik_x(L_x+x)} = e^{ik_x x} \Longrightarrow k_x L_x = 2\pi\cdot n_x,\ n_x = 0, \pm1, \ldots}$