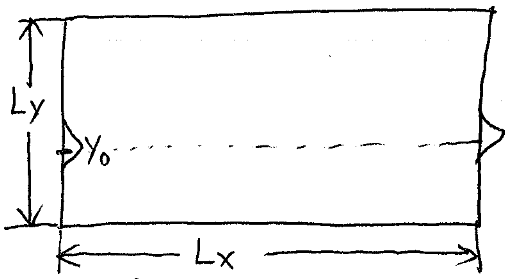
下面我们讨论 Landau Level 的简并度.

假设电子在 $L_x \times L_y$ 的区域中运动. 沿 x 方向周期边界. 可想象 x 方向形成圆筒. 那么 $x+L_x$ 与 x 是同一个地点.

波函数的单值性要求: $e^{ik_x(x+L_x)} = e^{ik_x x}$



$$\Rightarrow k_x \cdot L_x = 2\pi \cdot n_x, \quad n_x = 0, \pm 1, \cdots$$

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} \cdot n_x.$$

注意本征函数的"中心" $y_0 = \frac{c\hbar k_x}{eB} = k_x l^2$, 必须在 0 到 L_y 之间.

$$0 < y_0 = \frac{c\hbar}{eB}\frac{2\pi}{L_x} \cdot n_x \leq L_y$$

n_x 的取值范围 $0 < n_x \leq N$, $N = \frac{L_x L_y eB}{hc} = \frac{AB}{(\frac{hc}{e})}$

$A = L_x L_y$, AB 是总磁通, $\frac{hc}{e}$ 量纲也是磁通. 称磁通量子 (国际单位制下为 $\frac{h}{e}$)

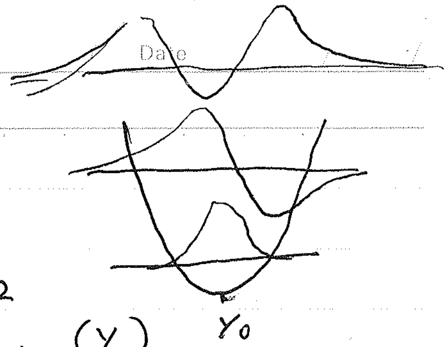
N 就是 Landau Level 的简并度.

- 实验: 设 $B = 1\,T$, 则 $l \sim 2.5 \times 10^{-8}\,m$.

  设 $A = L_x \cdot L_y \approx 10^{-4}\,m^2$, N 的量级 $N = \frac{A}{2\pi \cdot l^2} \sim 10^{10}$.

  y_0 之间的间隔 $\Delta y_0 = l^2 \cdot \frac{2\pi}{L_x} \sim \frac{l}{L_x} \cdot l \sim 10^{-6} \cdot l$. 远小于 l.

- 能量为 $\frac{1}{2}\hbar\omega_c$ 的电子, 经典运动: $\pi r^2 = \frac{hc}{2eB}$, 磁通 $\frac{1}{2}\frac{hc}{e}$



• 本征波函数的性质： ψ_{n,k_x}

几率密度： $\rho = |\psi_{n,k_x}|^2 = \phi^2_{n,k_x}(y)$

x方向几率不变，y方向为 Y_0 中心的分布

几率流密度 $\vec{j} = \frac{\rho}{\mu}\left(\nabla S + \frac{e\vec{A}}{c}\right) \leftarrow q = -e$

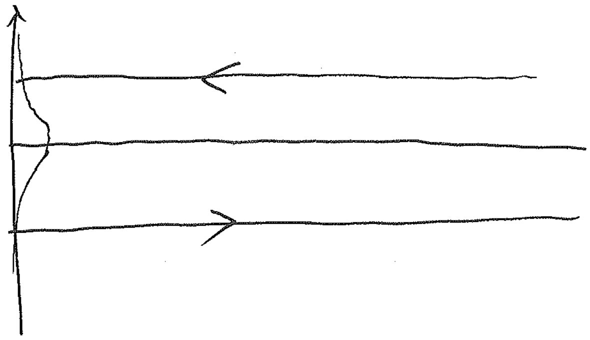
$e^{ik_x x} \longrightarrow S = \hbar k_x \cdot x, \quad \vec{A} = -By\,\vec{e_x}$ ← 福

$\Rightarrow \nabla S = \hbar k_x \vec{e_x}, \quad \nabla \cdot \nabla S = 0$

$\nabla \cdot \vec{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z = 0$. ← 库仑规范

$\Rightarrow \vec{j} = \frac{\rho}{\mu}\left(\hbar k_x - \frac{eB}{c} y\right)\vec{e_x}, \quad Y_0 = \frac{c\hbar k_x}{eB}$

Y_0



← Y_0 处，$j = 0$.

$\nabla \cdot \vec{j} = \frac{\nabla \rho}{\mu} \cdot \left(\nabla S + \frac{e\vec{A}}{c}\right) + \frac{\rho}{\mu}\left(\nabla \cdot \nabla S + \frac{e}{c}\nabla \cdot \vec{A}\right)$

由于 ρ 是 y 的函数 $\Rightarrow \partial_x \rho = 0 \Rightarrow \nabla\rho \cdot \nabla S = 0$

$\nabla \rho \cdot \vec{A} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j} = 0$.

几率不随时间变化 ⇒ 束缚定态

Landau gauge 还可选为 $\vec{A}=(0,\frac{1}{2}Bx,0)$

本征函数变为 $\phi_{n,k_y}(x)=N_n e^{-\frac{\alpha^2(x-x_0)^2}{2}}H_n(\alpha(x-x_0))$

$$\psi_{E,k_y}=e^{ik_y y}\phi_{n,k_y}(x)$$

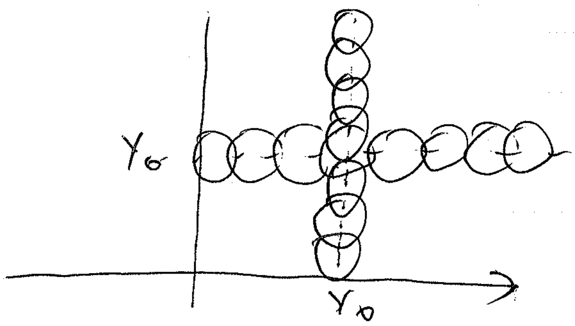
其中 $x_0=-k_y l^2$, $l^2=\frac{\hbar c}{eB}$

我们看到一个有y_0, 没x_0, 另一个有x_0没有y_0. 为什么?

$[x_0,y_0]=[x-\frac{\pi_y}{\mu\omega_c}, y+\frac{\pi_x}{\mu\omega_c}]$, x_0与y_0的值需要测

利用 $[x_0,\pi_x]=[x-\frac{\pi_y}{\mu\omega_c},\pi_x]=0=[x_0,\pi_y]$

$[x_0,y_0]=il^2$ 不对易! x_0与y_0是不能同时测准的.



第4讲

3 在对称规范中讨论：$\vec{B}=(0,0,B)=B\hat{z}$

$$\vec{A}=-\frac{1}{2}By\,\vec{e}_x+\frac{1}{2}Bx\,\vec{e}_y=\left(-\frac{1}{2}By,\frac{1}{2}Bx,0\right)$$

$$H_{xy}=\frac{1}{2\mu}\left[\left(P_x-\frac{eB}{2c}y\right)^2+\left(P_y+\frac{eB}{2c}x\right)^2\right]$$，平面内运动.

交叉项 $-(P_x y+yP_x)+(P_y x+xP_y)$

$$=2(xP_y-yP_x)=2L_z$$

$$H_{xy}=\frac{1}{2\mu}(P_x^2+P_y^2)+\frac{e^2B^2}{8\mu c^2}(x^2+y^2)+\frac{eB}{2\mu c}L_z$$ 旋磁比

- 当电子运动范围很小 $x^2+y^2\sim 0$（比如在原子内部）

$$H_{xy}=\frac{1}{2\mu}(P_x^2+P_y^2)-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

轨道磁矩 $\mu_z=-\frac{e}{2\mu c}L_z$

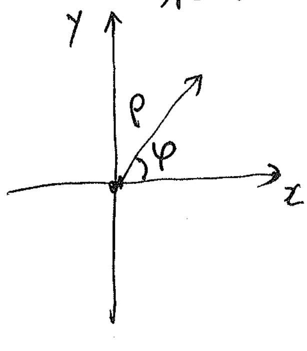
- $\frac{e^2B^2}{8\mu c^2}(x^2+y^2)=-\vec{\mu}_d\cdot\vec{B}>0$

  即 $\vec{\mu}_d$ 与 $\vec{B}$ 反向，抗磁

- 在 xy 平面内求解 $H_{xy}\psi(x,y)=E\psi(x,y)$

极坐标下 $P_x^2+P_y^2=-\hbar^2\nabla^2=-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)-\frac{\hbar^2\partial^2}{\rho^2\partial\varphi^2}$

$$=P_\rho^2+\frac{L_z^2}{\rho^2}$$



$$H_{xy}=\frac{P_\rho^2}{2\mu}+\frac{L_z^2}{2\mu\rho^2}+\frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2+\omega_L L_z$$

其中 $\boxed{\omega_L\equiv\frac{eB}{2\mu c}=\frac{\omega_c}{2}}$

- without $\omega_L L_z$　$H_{xy}\to P_x^2+\frac{1}{2}\mu\omega_L^2x^2+P_y^2+\frac{1}{2}\mu\omega_L^2y^2$

二维谐振子，

$$E=E_x+E_y=(n_x+n_y+1)\hbar\omega_L$$

$n_x,n_y=0,1,2,\cdots$

• 包含 $\omega_L L_z$，　$H_{xy} = \left(\frac{P_\rho^2}{2\mu} + \frac{L_z^2}{2\mu\rho^2}\right) + \frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2 + \omega_L L_z$

$[L_z, H_{xy}] = 0 \Leftarrow \because L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$

$\therefore$ 取 (L_z, H_{xy}) 为力学量完全集

$\psi_E(x,y)$ 可设为 $\boxed{R(\rho)e^{im\varphi}}$

再定义 $\chi \equiv \rho^{\frac{1}{2}}R, \Rightarrow \int R^2(\rho)\,\rho\,d\rho = \int \chi^2 d\rho$

代入本征方程　$H_{xy}\psi_E = E\psi_E$

$$\left(\frac{P_\rho^2}{2\mu} + \frac{m^2\hbar^2}{2\mu\rho^2} + \frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2 + \omega_L m\hbar\right)R(\rho) = ER(\rho)$$

$$\rho^{\frac{1}{2}}\frac{P_\rho^2}{2\mu}R + \frac{m^2\hbar^2}{2\mu\rho^2}\chi + \frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2\chi = (E - m\hbar\omega_L)\chi \quad ①$$

$$\chi' = \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^{\frac{1}{2}}R) = \frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}R + \rho^{\frac{1}{2}}R'$$

$$\chi'' = -\frac{1}{4}\rho^{-\frac{3}{2}}R + \frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}R' + \frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}R' + \rho^{\frac{1}{2}}R''$$

$$P_\rho^2 R = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)R$$
$$= -\hbar^2(R'' + \rho^{-1}R')$$

$$\rho^{\frac{1}{2}}P_\rho^2 R = -\hbar^2\left(\rho^{\frac{1}{2}}R'' + \rho^{-\frac{1}{2}}R' - \frac{1}{4}\frac{\rho^{\frac{1}{2}}R}{\rho^2}\right) - \frac{\hbar^2}{4\rho^2}\chi$$

$$\therefore ① \Rightarrow \frac{-\hbar^2}{2\mu}\chi'' + \frac{\hbar^2}{2\mu\rho^2}\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)\chi + \frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2\chi = (E - m\hbar\omega_L)\chi \quad ②$$

• $\omega_L L_z$ 的作用仅是移动 $E \to E - m\hbar\omega_L \equiv E'$

② 是二维谐振子本征方程(径向) ②

• 通过分离变量，容易求解二维谐振子.

但是②式是要求 ψ_E 是 L_z 的本征态.

我们在极坐标下来求解. $E' = E - m\omega_L\hbar$

$$② \to \quad \chi'' + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E' - \frac{(m+\frac{1}{2})(m-\frac{1}{2})\hbar^2}{2\mu\rho^2} - \frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2\right)\chi = 0 \qquad ③$$

可以利用现成的三维中心力解（三维各向同性振子）

$$\text{其径向：}\ \chi'' + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} - \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2\right)\chi = 0 \qquad ④.$$

$\chi = rR(r)$, $E = (2n_r + l + \frac{3}{2})\hbar\omega = (N + \frac{3}{2})\hbar\omega$, $N \equiv 2n_r + 1$

$n_r = 0, 1, 2, \cdots$

合流超几何,

$$\chi = r^{l+1} e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}} F(-n_r, l+\tfrac{3}{2}, \alpha^2 r^2)$$

where $\alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$ $\qquad \psi_n = R_{nl} Y_{lm}$

对比③式与④式： $\rho \to r$

$|m| - \frac{1}{2} \to l$ $\qquad$ (当 $m<0$, $-m-\frac{1}{2} \to l$)

$\therefore E' = (2n_\rho + |m| - \frac{1}{2} + \frac{3}{2})\hbar\omega_L$, $n_\rho = 0, 1, 2, \cdots$ $\qquad \omega_L \to \omega_c$

$$\boxed{E = (2n_\rho + |m| + m + 1)\hbar\omega_L = (N+1)\hbar\omega_L = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega_c}$$

$$n = \frac{1}{2}N = n_\rho + \frac{(|m|+m)}{2} = \begin{cases} n_\rho + m, & \text{if } m \geq 0 \\ n_\rho, & \text{if } m < 0 \end{cases}$$

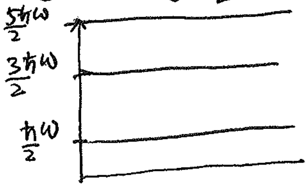
$$\chi = \rho^{|m|+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha_L^2\rho^2}{2}} F(-n_\rho, |m|+1, \alpha_L^2\rho^2)$$

where $\boxed{\alpha_L^2 = \frac{\mu\omega_L}{\hbar} = \frac{1}{2}\frac{eB}{\hbar c}}$, $\quad \dfrac{\pi B(\frac{1}{\alpha_L})^2}{\frac{hc}{e}} = 1$

$$\psi_E = \rho^{-\frac{1}{2}}\chi e^{im\varphi}$$

讨论：

1、 $E=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_c$ 与 Landau gauge 的结果一致.



* 第三种 $\vec{A}=(B, Bx, 0)$ 也一样

2、 简并度

• 基态 $n_\rho=0$, 所有 $m<0$ 的态能量相同 $\Rightarrow f=\infty$.

$|m|$ 对应转动能, ↑

m 对应的势能, ↓

其它能级也一样.

• 对于有限尺寸系统：面积 A 的圆盘.

简并波函数的"半径" $R^2 \propto \frac{2|m|+1}{2\alpha_L^2}$.

$m=0,-1,-2,\cdots\cdots,\alpha_L^2R^2-1$

$$f=\alpha_L^2R^2=\frac{eBR^2}{2\hbar c}=\frac{eBA}{hc}=\frac{BA}{\frac{hc}{e}}$$

与 Landau Gauge 相同.

（具体见作业）

3、 两种规范得到的本征波函数不同.

这是正常的：∵好量子数选取得不同.

例：三维各向同性谐振子. 以 H_x, H_y, H_z 为完全集与以 H, L^2, L_z 为完全集的能量本征函数

ψ_{n_x,n_y,n_z} 与 $\psi_{n,l,m}$，互相表示取为不同的表象

在能级有简并的情况下，能量本征函数的选取不唯一

与守恒量完全集的选取有关

三维各向同性谐振子 可选 (H_x, H_y, H_z) 为完全集

对于能级 $E_n=(n_x+n_y+n_z+\frac{3}{2})\hbar\omega=\frac{5}{2}\hbar\omega$

本征态为 $\phi_{n_x=1,n_y=0,n_z=0}$ 、$\phi_{0,1,0}$ 、$\phi_{0,0,1}$

其中 $\phi_{n_xn_yn_z}=\psi_{n_x}(x)\,\psi_{n_y}(y)\,\psi_{n_z}(z)$

也可以选 (H, L^2, L_z) 为完全集

对能级 $E_n=\frac{5}{2}\hbar\omega$

本征态为 ψ_{nlm} : $\psi_{1,1,1}$, $\psi_{1,1,0}$, $\psi_{1,1,-1}$

$$\psi_{nlm}\sim r^l e^{-\frac{\alpha^2r^2}{2}}\,F(-n_r, l+\tfrac{3}{2}, \alpha^2r^2)$$

$$\alpha=\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}},\quad n=2n_r+l$$

可以证明：

$$\begin{pmatrix}\psi_{1,1,1}\\ \psi_{1,1,-1}\\ \psi_{010}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{i}{\sqrt2} & 0\\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{i}{\sqrt2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{100}\\ \phi_{010}\\ \phi_{001}\end{pmatrix}$$

参考 曾谨言《量子力学教