第十讲

前面讨论了单自旋的路径积分.

$$Z = (2S+1)\int \frac{d\vec{n}}{4\pi} \langle \vec{n} | e^{-\beta H(\vec{S})} | \vec{n} \rangle = \int \mathcal{D}\vec{n}(\tau)\, e^{-S(\tau)}$$

$$S(\tau) = \int_0^\beta d\tau \left[\langle \vec{n}(\tau) | \frac{d}{d\tau} | \vec{n}(\tau) \rangle + H(S\vec{n}) \right] = 4\pi i S W_0 + \int_0^\beta d\tau\, H(S\vec{n}(\tau))$$

$$W_0 = \frac{\Omega(\vec{n}(\tau))}{4\pi} = \int_0^1 du \int_0^\beta d\tau\, \vec{n}(u,\tau) \cdot \left[\frac{\partial \vec{n}}{\partial u}(u,\tau) \times \frac{\partial \vec{n}}{\partial \tau}(u,\tau) \right]$$

$$\delta W_0 = \int_0^\beta d\tau\, \delta\vec{n}(\tau) \cdot \left[\frac{\partial \vec{n}}{\partial \tau}(\tau) \times \vec{n}(\tau) \right]$$

最小作用量原理 $\delta S = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

在实时下，$\tau = it$，$e^{-S(\tau)} = e^{iS(t)}$，$S(t) = iS(\tau) = \int_0^{t'} dt \left[-\langle \vec{n}(t) | \frac{d}{i\,dt} | \vec{n}(t) \rangle - H(S\vec{n}(t)) \right]$

$$= \int_0^{t'} dt \left[i \langle \vec{n}(t) | \frac{d}{dt} | \vec{n}(t) \rangle - H(S\vec{n}(t)) \right]$$

注意 $\frac{d}{dt} \langle \vec{n}(t) | \vec{n}(t) \rangle = 0 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \langle \vec{n}(t) | \right) \cdot | \vec{n}(t) \rangle}_{①} + \underbrace{\langle \vec{n}(t) | \frac{d}{dt} | \vec{n}(t) \rangle}_{②} = 0$

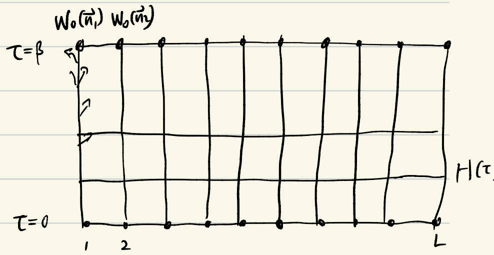
① = ②*，　① = −②　$\Rightarrow$ ② 纯虚数

$-\int_0^{t'} dt \langle \vec{n}(t) | \frac{d}{dt} | \vec{n}(t) \rangle$ 在 $e^{iS(t)}$ 中贡献一个 Berry phase，条件是 $|\vec{n}(t')\rangle$ 回到 $|\vec{n}(0)\rangle$

推广到一维 Heisenberg chain：$H = J \sum_{i=1}^{L} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1} - \sum_{i=1}^{L} \vec{h}_i \cdot \vec{S}_i = H(\vec{S}_1, \cdots, \vec{S}_L)$

$$S(\tau) = 4\pi i S \sum_i W_0(\vec{n}_i(\tau)) + \int_0^\beta d\tau\, H(S\vec{n}_1, \cdots, S\vec{n}_L)$$

$$Z = \int \mathcal{D}\left(\prod_{i=1}^{L} \vec{n}_i\right) e^{-S(\tau)}$$



下面我们导出对 spin chain 的连续场描述（成立条件一般是 $\xi \gg a$）

• 铁磁 Ferromagnet （$J<0$）

经典 H 为： $H = -|J| S^2 \sum_i \vec{n}_i \cdot \vec{n}_{i+1} - S \sum_i \vec{h} \cdot \vec{n}_i$

$$-\vec{n}_{i+1}\cdot\vec{n}_i \longrightarrow \frac{a^2}{2}\frac{(\vec{n}_{i+1}-\vec{n}_i)^2}{a^2} \rightarrow \frac{1}{2}a^2\left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial x}\right)^2,$$
a 为晶格常数，$\vec{n}(x)$ 为连续场

于是 $$\boxed{H = \frac{1}{2}|J| S^2 a^2 \int \frac{dx}{a} (\partial_x \vec{n})^2 - S \int \frac{dx}{a}\, \vec{h}\cdot\vec{n}}$$

$$(\cdot) = |J| S^2 a^2 (\partial_x \vec{n}) \cdot \frac{\partial(\partial_x \vec{n})}{\partial \vec{n}} - S\vec{h} = |J| S^2 a^2 \frac{[\partial_x(\partial_x \vec{n}\cdot\partial\vec{n}) - (\partial_x^2 \vec{n})\cdot\partial\vec{n}]}{\partial \vec{n}} - S\vec{h}$$

连续场的作用量：

$$S(\tau) = 4\pi i S \int \frac{dx}{a} W_0(\vec{n}(x,\tau)) + \frac{1}{2}|J| S^2 a^2 \int d\tau \frac{dx}{a} (\partial_x \vec{n})^2 - S\int d\tau \frac{dx}{a}\, \vec{h}\cdot\vec{n}$$

$\delta S = 0 \Rightarrow$ $$\boxed{i\partial_\tau \vec{n} = |J| S a^2 (\vec{n} \times \Delta \vec{n}) - \vec{h}\times\vec{n}}$$

此为经典 Landau-Lifshitz 方程 for magnetization.

证明：
$$\delta \int d\tau\, H = \int d\tau\, \delta H = \int d\tau \int \frac{dx}{a} \left(\frac{1}{2}|J| S^2 a^2 \frac{\partial}{\partial(\partial_x \vec{n})}(\partial_x \vec{n})^2 \cdot \delta(\partial_x \vec{n}) - S\vec{h}\cdot\delta\vec{n}\right)$$

$$\int dx \frac{\partial(\partial_x\vec{n})^2}{\partial(\partial_x \vec{n})}\cdot\delta(\partial_x\vec{n}) = 2\int dx\, (\partial_x\vec{n})\cdot\delta(\partial_x\vec{n}) \overset{\text{分部}}{=} 2\underbrace{\int_0^L dx\, \partial_x(\partial_x\vec{n}\cdot\delta\vec{n})}_{=0\ \because\ \text{周期边界}} - 2\int dx\, (\partial_x^2\vec{n})\cdot\delta\vec{n}$$

$$\delta(4\pi i S \textstyle\sum W_0) = \int d\tau \int \frac{dx}{a}\, iS(\dot{\vec{n}}\times\vec{n})\cdot\delta\vec{n} \Rightarrow \quad iS(\dot{\vec{n}}\times\vec{n}) = +|J| S^2 a^2 (\partial_x^2 \vec{n}) + S\vec{h}$$

$$iS(\vec{n}\times\dot{\vec{n}}\times\vec{n}) = iS\dot{\vec{n}} = |J| S^2 a^2\, \vec{n}\times(\partial_x^2\vec{n}) + S\,\vec{n}\times\vec{h}$$

$$i\,\partial_\tau \vec{n} = |J| S a^2\, \vec{n}\times(\partial_x^2\vec{n}) - \vec{h}\times\vec{n}$$

• 自旋波的色散关系：

假设 $\vec{h} = (0,0,h)$. 自旋沿 z 方向排列，有小涨落： $\vec{n} = (u_1, u_2, 1)$， $n^2 = 1 + O(u^2)$

$$\partial_x^2 \vec{n} = (\partial_x^2 u_1, \partial_x^2 u_2, 0)$$

换到实时： $d\tau = i\,dt \rightarrow$ $i\frac{\partial \vec{n}}{\partial \tau} = \frac{\partial \vec{n}}{\partial t}$

$$\begin{cases} \partial_t u_1 = -|J| S a^2 \partial_x^2 u_2 - h u_2 & ① \\ i\partial_t u_2 = i|J| S a^2 \partial_x^2 u_1 + i h u_1 & ② \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & 1 \\ \partial_x^2 u_1 & \partial_x^2 u_2 & 0 \end{vmatrix}$$

设 $u_1 + i u_2 \sim u\, e^{ikx - i\omega t}$， ①+② $\Rightarrow$

$$-i\omega u = -i(|J| S a^2 k^2 u - h u)$$

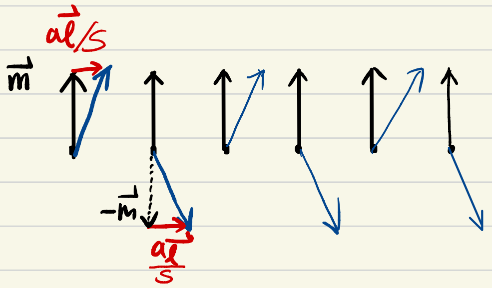
$$\boxed{\omega = |J| S a^2 k^2} \qquad h \rightarrow 0$$

此上结果可推广到 d维： $\partial_x^2 \vec{n} \longrightarrow \Delta \vec{n}$

• 反铁磁 (Antiferromagnet): $J>0$

经典 H 为: $H = JS^2\sum_i \vec n_i\cdot\vec n_{i+1} - S\sum_i \vec h\cdot\vec n_i$

虽然 H 看上去与 FM 差不多，但是最近邻 $\vec n_i$ 与 $\vec n_{i+1}$ 倾向于反向. 因此我们不能简单地用 $\vec n(x)$ 代替 $\vec n_i$. 我们需要定义 $\vec m(x)$ 与 $\vec l(x)$，它们是光滑的连续场.



$\vec m(x)$ 是局域序参量，称为交错磁化强度: (staggered magnetization)

考虑以 x 为中心，L 范围内的 $\vec n_i$，$L\gg a$

$$\boxed{\frac{1}{L}\sum_{i=-\frac{L}{2}}^{L/2}\vec n_{x+i}(-1)^{x+i} = \vec m(x)}$$

$\vec m(x)$ 缓慢变化，可理解为粗粒化的结果. 再引入 $\vec l(x)$，使得:

$$\boxed{\vec n_i(\tau) = (-1)^i\vec m(x,\tau) + \frac{a}{S}\vec l(x,\tau)} \qquad (1)$$

引入 $\vec l(x)$ 也是必要的，因为不同的 $\vec n_i$ 可以给出一样的 $\vec m(x)$，需 $\vec l(x)$ 来区分.

$\frac{a}{S}\vec l(x)$ 是 $\vec n_i$ 在 x 附近的涨落，是小量. (a 为晶格常数，S 为自旋量子数)

由于 $\vec n_i^2=1 \Rightarrow m^2 + 2(-1)^i a\,\vec m\cdot\frac{\vec l}{S} + \frac{a^2 l^2}{S^2} = 1$，要求 $\vec m\cdot\vec l=0$，

引入 $\vec m(x,\tau) = \vec n(x,\tau)\, b$，其中 $\vec n^2=1$，b 为归一化因子

$\Rightarrow b^2 = 1-\frac{a^2l^2}{S^2}$，$b=\sqrt{1-\frac{a^2l^2}{S^2}}$

我们来计算

$$\vec n_{i+1}\cdot\vec n_i = \left[(-1)^{i+1}\vec m(x+a)+\frac{a}{S}\vec l(x+a)\right]\cdot\left[(-1)^i\vec m(x)+\frac{a}{S}\vec l(x)\right]$$

$$= (-1)\,\vec m(x+a)\cdot\vec m(x) + \frac{a^2}{S^2}\vec l(x+a)\cdot\vec l(x) + \frac{a}{S}\left[(-1)^{i+1}\vec m(x+a)\cdot\vec l(x) + (-1)^i\vec m(x)\cdot\vec l(x+a)\right]$$

其中:

$$-\vec m(x+a)\cdot\vec m(x) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\vec m(x+a)-\vec m(x)}{a}\right)^2 - \frac{m^2(x+a)}{2} - \frac{m^2(x)}{2} = \frac12 a^2(\partial_x m)^2 - m^2(x)$$

由于$\frac{a}{S}\vec{l}$是小量：$\frac{a^2}{S^2}\vec{l}(x+a)\cdot\vec{l}(x) = \left(\vec{l}(x) + a\cdot\frac{\partial \vec{l}(x)}{\partial x}\right)\cdot\vec{l}(x)\frac{a^2}{S^2} \approx \frac{a^2}{S^2}\vec{l}^2(x)$ （二阶）

$$\vec{m}(x+a)\cdot\vec{l}(x) \approx \vec{m}(x)\cdot\vec{l}(x) = 0$$

$\Rightarrow \quad \vec{n}_{i+1}\cdot\vec{n}_i = \frac{a^2}{2}(\partial_x\vec{n})^2 b^2 - b^2 + a^2\frac{l^2}{S^2}$， 由于 $b^2 = 1 - \frac{a^2}{S^2}\vec{l}^2$， 保留到$\frac{a^2 l^2}{S^2}$

$$= \frac{a^2}{2}(\partial_x\vec{n})^2 + \frac{4a^2}{2}l^2 \quad -1$$

略去常数"1"，上式成为：

$$\boxed{\vec{n}_i\cdot\vec{n}_{i+1} \longrightarrow \frac{a^2}{2}(\partial_x\vec{n})^2 + \frac{4a^2}{2}\frac{l^2}{S^2}}$$

于是（不考虑$\sum_i \vec{h}\cdot\vec{n}_i$）

$$H = \int\frac{dx}{a}\left[\frac{JS^2a^2}{2}(\partial_x\vec{n})^2 + \frac{4J}{2}a^2 l^2\right]$$

定义 $\rho_s = JS^2a$，$\frac{1}{\chi_\perp} = 4Ja$，

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\int dx\left[\rho_s(\partial_x\vec{n})^2 + \frac{l^2}{\chi_\perp}\right]}$$

- ρ_s项反映序参量$\vec{n}(x)$空间不均匀带来的能量升高，$\Rightarrow$ ρ_s是 stiffness

- $\sum_j S\vec{n}_j(\tau) = S\int\frac{dx}{a}\cdot\frac{a\vec{l}(x,\tau)}{S} = \int dx\,\vec{l}(x,\tau) \longrightarrow$ 总角动量，$\therefore$ $\vec{l}$是角动量密度

 （这也是为什么用$\frac{a}{S}\vec{l}$来表示$\vec{n}$对$(-1)^i\vec{n}(x)$偏离的原因）

- 假设沿垂直于$\vec{n}$方向加$\vec{B}$：$\vec{B}\cdot\vec{n} = 0$， 那么 $E \sim \vec{B}\cdot\vec{l}$，$\leftarrow$ $\vec{l}\sim$磁矩

 设 $\vec{l} = \chi_\perp\vec{B}$，磁矩正比于外场，$\chi_\perp$为磁化率 因此 $E \sim \frac{l^2}{\chi_\perp}$

 另一个角度：$\frac{l^2}{2\times\frac{\chi_\perp}{2}}$理解为角动能，则$\frac{\chi_\perp}{2}$也可视为转动惯量

- $\rho_s\chi_\perp = \frac{S^2}{4}$， 改变$S$可调整$\rho_s\chi_\perp$