第十二讲

反铁磁自旋链的场描述：

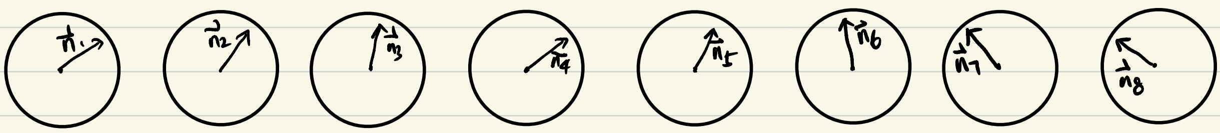
$$\boxed{Z=\int \mathcal{D}\vec n\,\mathcal{D}\vec l \prod_{x,\tau}\delta(\vec n\cdot\vec l)\, e^{-S}}$$ ①

其中

$$\boxed{S = i\theta Q - i\int d\tau\, dx\, \vec l\cdot(\vec n\times\partial_\tau \vec n) + \frac{1}{2}\int d\tau\, dx\left[\rho_s(\partial_x\vec n)^2 + \frac{\vec l^2}{\chi_\perp}\right]}$$ ②

注意 约束条件 $\prod_{x,\tau}\delta(\vec n\cdot\vec l)$ 保证 $\vec n\cdot\vec l=0$ 的要求

假设 $i\theta Q=n\cdot 2\pi i$，S 是什么系统的作用量？



$\frac{1}{2}\int dx\, \rho_s(\partial_x\vec n)^2$ 可理解为 $\vec n(x)$ 场（自旋）的梯度时 stiffness ← 经典铁磁 O(3) 模型

$\frac{\vec l^2}{2\chi_\perp/2}$ 可理解为 球面上粒子的角动能，$\frac{\chi_\perp}{2}$ 是转动惯量

$-i\int d\tau\, dx\, \vec l\cdot(\vec n\times\partial_\tau\vec n)$ 来自 Berry phase

QM!

我们来研究②式的实时形式　（ $S(t)=iS(\tau)$, $d\tau=i\,dt$ ）

$$S(t)=iS(\tau)=\int d\tau\, dx\, \vec l\cdot(\vec n\times\partial_\tau\vec n)+\frac{i}{2}\int d\tau\, dx\left[\rho_s(\partial_x\vec n)^2+\frac{\vec l^2}{\chi_\perp}\right] \Longrightarrow$$

$$\boxed{S(t)=\int dt\, dx\, \vec l\cdot\left(\vec n\times\frac{\partial\vec n}{dt}\right)-\frac{1}{2}\int dt\, dx\left[\rho_s(\partial_x\vec n)^2+\frac{\vec l^2}{\chi_\perp}\right]}$$

$$\frac{\delta S}{\delta\vec l}=0 \Rightarrow \boxed{\frac{\vec l}{\chi_\perp}=\vec n\times\frac{\partial\vec n}{\partial t}}$$

$\vec l$ 是角动量才的定义式！

• 很自然 $\vec l\cdot\vec n=0$ 的条件满足 ①

②式子是类似于单粒子情形 $S' = \int_0^\beta d\tau \left[-i\, p(\tau)\frac{dx}{d\tau} + H(x(\tau), p(\tau)) \right]$ 的结果.

此系统的 Hamiltonian 为:

$$\boxed{H = \int dx \left[\frac{\rho_s}{2} (\nabla \vec{n})^2 + \frac{\vec{L}^2}{2\chi_\perp} \right]}$$

对易关系:

$$[n_\alpha(x), L_\beta(x')] = i\delta(x-x')\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, n_\gamma(x)$$
$$[L_\alpha(x), L_\beta(x')] = i\delta(x-x')\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, L_\gamma(x)$$

- Quantum Rotor model

现在计算配分函数，积掉角动量P分

$$\boxed{Z=\int \mathcal{D}\vec{n}\,\mathcal{D}\vec{l}\,\prod_{x,\tau}\delta(\vec{n}\cdot\vec{l})\,e^{-S}}$$

注意 约束条件 $\prod_{x,\tau}\delta(\vec{n}\cdot\vec{l})$ 保证 $\vec{n}\cdot\vec{l}=0$ 的要求，将其写成（引入乘子 $\lambda(x,\tau)$）

$$\boxed{利用\ \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}=\delta(x)}$$

$$\prod_{x\tau}\delta(\vec{l}\cdot\vec{n})\propto\int\mathcal{D}\lambda(x,\tau)\,e^{i\int dx\,d\tau\,\lambda\,\vec{l}\cdot\vec{n}}$$

（每个时空点都有一个 δ 函数）

看积分：

$$I=\int\mathcal{D}\lambda\int\mathcal{D}\vec{l}\;e^{\int dx\,d\tau\left[\frac{-\vec{l}^2}{2\chi_\perp}+i\vec{l}\cdot\left(\vec{n}\times\frac{\partial\vec{n}}{\partial\tau}+\lambda\vec{n}\right)\right]}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}dx\;e^{-\frac{1}{2}ax^2+iJx}=\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-J^2/2a}}$$

对 $\vec{l}$ 的路径积分实际是在每个 (x,τ) 的高斯积分。

$$I=\text{const}\cdot\int\mathcal{D}\lambda\;e^{-\frac{\chi_\perp}{2}\int dx\,d\tau\left(\vec{n}\times\frac{\partial\vec{n}}{\partial\tau}+\lambda\vec{n}\right)^2}=\text{const}\cdot e^{-\frac{\chi_\perp}{2}\int dx\,d\tau\left(\frac{\partial\vec{n}}{\partial\tau}\right)^2}\cdot\int\mathcal{D}\lambda\,e^{-\frac{\chi_\perp}{2}\int dx\,d\tau\,\lambda^2}$$

$$=\text{const}'\;e^{-\frac{\chi_\perp}{2}\int dx\,d\tau\left(\frac{\partial\vec{n}}{\partial\tau}\right)^2}$$

- 用到：$\boxed{\left(\vec{n}\times\frac{\partial\vec{n}}{\partial\tau}\right)^2=\left(\frac{\partial\vec{n}}{\partial\tau}\right)^2,\quad \vec{n}\cdot\left(\vec{n}\times\frac{\partial\vec{n}}{\partial\tau}\right)=0,\quad \vec{n}^2=1}$

最后 $\quad Z=\int\mathcal{D}\vec{n}\;e^{-S}$

其中：

$$\boxed{S(\tau)=-i\theta Q+\int dx\,d\tau\left[\frac{\rho_s}{2}\left(\frac{\partial\vec{n}}{\partial x}\right)^2+\frac{\chi_\perp}{2}\left(\frac{\partial\vec{n}}{\partial\tau}\right)^2\right]}$$

在实时情况，(不看 θ-term，) $(iS(t) = -S(\tau))$

$$S(t) = i\int dx d\tau \left[\frac{\rho_s}{2}\left(\frac{\partial\vec n}{\partial x}\right)^2 + \frac{\chi_\perp}{2}\left(\frac{\partial\vec n}{\partial \tau}\right)^2\right] = \int dx dt\left[\frac{\chi_\perp}{2}\left(\frac{\partial\vec n}{\partial t}\right)^2 - \frac{\rho_s}{2}\left(\frac{\partial\vec n}{\partial x}\right)^2\right]$$

经典运动方程： $\boxed{\chi_\perp \frac{\partial^2\vec n}{\partial t^2} - \rho_s\frac{\partial^2\vec n}{\partial x^2} = 0}$

这是一个波动方程，声速 $c = \sqrt{\frac{\rho_s}{\chi_\perp}} \Rightarrow \chi_\perp = \frac{\rho_s}{c^2}$

$\boxed{\omega = ck}$ 对比 FM： $\omega = |J|Sa^2k^2$

于是

$$\int dx d\tau\left[\frac{\rho_s}{2}\left(\frac{\partial\vec n}{\partial x}\right)^2 + \frac{\chi_\perp}{2}\left(\frac{\partial\vec n}{\partial \tau}\right)^2\right] = \int dx\int_0^\beta d\tau\left[\frac{\rho_s}{2}\left(\frac{\partial\vec n}{\partial x}\right)^2 + \frac{\rho_s}{2}\left(\frac{\partial\vec n}{\partial c\tau}\right)^2\right]$$

令 $\tau' = c\tau$，$\beta \to c\beta$. $\frac{\rho_s}{c} = \sqrt{\chi_\perp\rho_s} \equiv \frac{1}{g}$ • τ' 量纲换成长度.

$$\boxed{S = -i\theta Q + \frac{1}{2g}\int dx\int_0^{c\beta} d\tau\left[\left(\frac{\partial\vec n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vec n}{\partial\tau}\right)^2\right]}$$

θ-term 之外的作用量 就是著名的 Nonlinear-sigma model (NLSQ)

$g = \sqrt{\frac{1}{\chi_\perp\rho_s}}$ → "温度"，$\because \chi_\perp\rho_s = \frac{S^2}{4}$，调 S = 调 "T" 增大 S = 降温. ⟶ Haldane phase 反预期.

- S = 2，半整数.
- Ladder system： even / odd

参见. Sandvik，§2.3. §4.3.

• Boundary states for spin-1 chains with Haldane gap

$$S_B'(\tau) = i\theta\, Q$$

其中 $\theta = 2\pi S$，　$Q\in\mathbb{Z}$　for 周期边界，(或 $\vec n(x)\to\vec n_0$, $x,\tau\to\infty$)

• 当 chain 很长，但有限长 L，自由边界：$\vec n(0)$ 与 $\vec n(L)$ 任意

$$S_B'(\tau) = \frac{i\theta}{4\pi}\int d\tau\int_0^L dx\ \vec n\cdot(\partial_x\vec n\times\partial_\tau\vec n)$$

$$= i\theta\left[\frac{\Omega_L}{4\pi} + Q - \frac{\Omega_0}{4\pi}\right]$$

设 $S=1$, $\theta=2\pi$,

$$S_B' = i\left[\frac{\Omega_L}{2} - \frac{\Omega_0}{2}\right]$$

这是两个 $S=\frac12$ 自旋的 Berry phase之差，没有 H 部分！

$\Rightarrow$ Haldane phase 有 gapless boundary $s=\frac12$ excitations （开边界时）

QM: $\vec s_1+\vec s_2 = \vec S$，　S 的量子数 $=0, 1, \cdots, s_1+s_2$，但是 $S=1$ 反铁磁链有2个 $S=\frac12$ 自旋！

• 对 bulk gap 和 boundary $\frac12$ 的理解：AKLT model

$$H = J\sum_j\left[\vec S_j\cdot\vec S_{j+1} + \overset{J'}{\frac13}(\vec S_j\cdot\vec S_{j+1})^2\right] = J\sum_j \hat P_2(j,j+1)$$

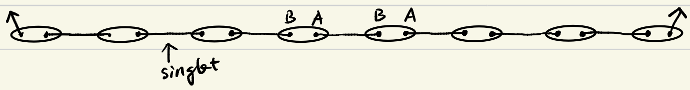
$\hat P_2(i,i+1)$ 是投影算符：　$\vec S = \vec s_1+\vec s_2$，$\hat P_2(1,2) = S^2(S^2-2)/12$，$S=0,1,2$，

$\hat P_2$ 将9维空间投影到5维 $S=2$ 的子空间。　($S_z=\pm2,\pm1,0$)

$$12\cdot\hat P_2 = (\vec s_1+\vec s_2)^2\left((\vec s_1+\vec s_2)^2-2\right) = (4+2\vec s_1\cdot\vec s_2)(2+2\vec s_1\cdot\vec s_2) = 4\left[2+3\vec s_1\cdot\vec s_2+(\vec s_1\cdot\vec s_2)^2\right]$$

$$\hat P_2|\alpha\rangle = |S=2\rangle\langle S=2|\cdot|\alpha\rangle \simeq C_3|S=2\rangle$$

设 $|\alpha\rangle = C_1|S=0\rangle + C_2|S=1\rangle + C_3|S=2\rangle$



GS: 把每 S_j 看成两个 $S=\frac{1}{2}$ 自旋 A, B,

$$|\psi\rangle = \hat{P} \prod_j \left(|+\rangle_{jA} |-\rangle_{j+1\,B} - |-\rangle_{jA} |+\rangle_{j+1\,B} \right)$$

投影 $\hat{P}$ 保证 $\vec{S}_j = \vec{S}_{jA} + \vec{S}_{jB}$ 总自旋 $S_j = 2$.

$|\psi\rangle$ 的性质: $(\vec{S}_j + \vec{S}_{j+1})$ 量子数不为 2. $\Rightarrow$ $|\psi\rangle$ 是 H_{AKLT} 的 GS

破坏任一单态都将提升能量.

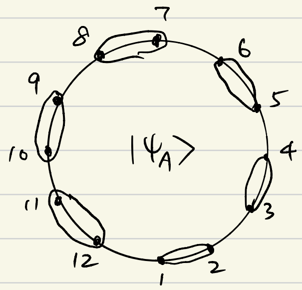
此外, 数值计算表明, $|\psi\rangle$ 是唯一的 GS, 与激发态间的 Gap $\Delta_{AKLT} = 0.350J$

- 对于 open chain $\langle S_0 \cdot S_n \rangle = (-1)^n \cdot (S+1)^2\, e^{-\kappa n}$ $(n \neq 0)$, $\kappa(S) = \ln\left(1+\frac{2}{S}\right)$

指数衰减

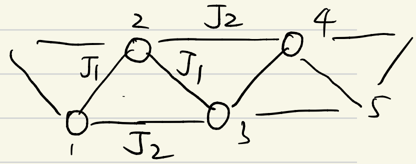
量子相变

• The Majumdar-Ghosh Hamiltonian ($S=\frac{1}{2}$)　　引入竞争的阻挫相互作用.

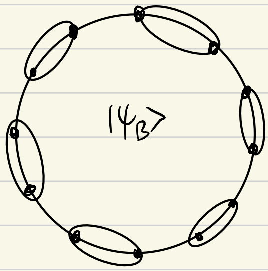


一般：

$$H^{MG} = J_1 \sum_{i=1}^{L} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1} + J_2 \sum_{i=1}^{L} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+2}$$



$\vec{S}_{N+1} = \vec{S}_1$　　阻挫



frustration-driven QPT:

$$g = J_2/J_1, \quad g_c = 0.2411$$

$g > g_c$: VBS: 破缺平移对称性: Z_2.

$g < g_c$: $C(r) \sim \frac{1}{r} + \log \cdots$

$g = \frac{1}{2}$ 时. M-G point:　$H^{MG} = J \sum_i (S_i \cdot S_{i+1} + \frac{1}{2} S_i \cdot S_{i+2})$

基态严格是两重简并的单态直积, 如图.

• the parent Hamiltonian of the two dimer states (exact GS)

热力学极限下 破坏为 $|\psi_A\rangle$ 或 $|\psi_B\rangle$

有限尺寸下: $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_A\rangle + |\psi_B\rangle)$

$$|\psi(\pi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_A\rangle - |\psi_B\rangle)$$

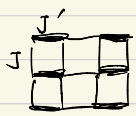
• $d>1$ 的情况. $S=\frac{1}{2}$ 前面我们说明了:

在AF态, 由于 $\vec n$ 的变化缓慢, 如果一根链的 θ term $=\frac{iS}{2}4\pi Q$, 相邻的一根必为 $-\frac{iS}{2}4\pi Q$, 即相互抵消.

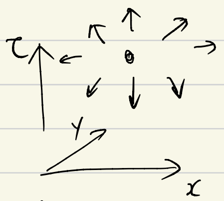
如果引入竞争的相互作用, 导致相变情况就可能不同: 反铁磁相中的缺陷可以在晶格尺度上剧烈变化, 从而导致一些位型有贝的相因子

θ-term 非常重要!

• 不是什么相变都有这个效应. 比如 dimerized Heisenberg.



$$H=J\sum_{\langle ij\rangle}\vec S_i\cdot\vec S_j + J'\sum_{\langle ij\rangle'}\vec S_i\cdot\vec S_j$$



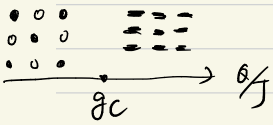
← Hedgehog

• 足够大的 J' 会导致 Neel 到顺磁相变. 3D O(3) 普适类.

但 Berry phase 无作用. 在 g_c, 大量 Hedgehog 出现破坏长程序

• 另一种相变, 比如 JQ model $H=J\sum\vec S_i\cdot\vec S_j + Q\sum_{ijkl}(\vec S_i\cdot\vec S_j)(\vec S_k\cdot\vec S_l)$

• 在Q 足够大时系统进入 VBS 序: 平移对称性破缺.



• 相变时有特别的 Hedgehog 出现, 视其"核"的位置不同, 一个 Hedgehog 会引入 $1, i, -1, -i$ 4种相因子, 称为 quadrupled hedgehogs, 这导致 VBS.

• 但是一般的 Hedgehog 是被抑制的. 导致普适类的变化;

参考文献:

1. A. Abanov §4.5. §4.6.
2. A. Auerbach. Interacting Electrons and Quantum Magnetism chap 8. §9.3
3. A. Sandvik. Computational studies of Quantum spin systems §2.3, §4.3