# 第十八讲

## § 高斯近似

$$\frac{H[\sigma]}{T} = \int d^dx \,\left[a_0 + \frac{1}{2} a_2\sigma^2 + \frac{1}{4} a_4\sigma^4 + \frac{1}{2} c(\nabla\sigma)^2 + \cdots\right]$$

一个位型出现的几率 $P(\sigma)\propto e^{-\frac{H[\sigma]}{T}}$，　$\frac{H[\sigma]}{T}\to S$ 也称 L-G 作用量

最可几位型就是 $\delta(H[\sigma]/T)=0$ 的位型，（类似最小作用量）

考虑 $n=1$，$\vec\sigma(\vec x)\to m(x)$，　$\delta(\frac{H}{T})=0$ 就是：　　注：$\delta(\nabla m)^2 = 2\nabla m\cdot\delta(\nabla m) = -2\nabla^2 m\,\delta m$

$$\boxed{a_2 m(\vec x) + a_4 m^3(\vec x) - c\,\nabla^2 m(\vec x) = 0}$$ ← Euler-Lagrange Eq 或 saddle point Eq.

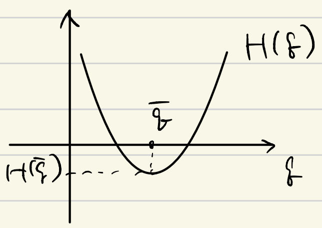
最简单的条件：$m(\vec x)$ 是常数：　$a_2 m + a_4 m^3 = 0$　　回到 Landau 平均场!

- $a_2(T)\propto(T-T_c)$　　当 $T>T_c$，$m=0$；　当 $T<T_c$，$m=\sqrt{-\frac{a_2}{a_4}}\equiv m_0$

所以平均场是 L-G 理论的 saddle point 近似

也称 $H[\sigma]$ 为 L-G 自由能

- 下面考虑围绕最可几位型的涨落




$p\propto e^{-H(q)/T}$，　设 $\frac{\partial H}{\partial q}\Big|_{q=\bar q}=0$.

$$\frac{H(q)}{T} = \frac{H(\bar q)}{T} + \frac{1}{2}\frac{(q-\bar q)^2}{\lambda^2}, \qquad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\Big|_{q=\bar q}$$

$$\boxed{p(q)\propto e^{-(q-\bar q)^2/2\lambda^2}}$$

$\lambda$ 是高斯分布的半宽. 这就是高斯近似

性质：• $\langle q\rangle = \frac{\int q\, p(q)\,dq}{\int p(q)\,dq} = \bar q$　　• $\langle (q-\bar q)^2\rangle = \lambda^2$

利用 $\langle (q-\bar q)\rangle=0$　　　• 此近似合理的条件：$\lambda^2$ 不能太大

- $$e^{-f/T} = \int dq\, e^{-H(\bar q)/T - (q-\bar q)^2/2\lambda^2} = e^{-H(\bar q)/T}(2\pi\lambda^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f = H(\bar q) - \frac{T}{2}\ln(2\pi\lambda^2)$$

公式：$\langle x^2\rangle \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2} ax^2}\,x^2}{\int_{-\infty}^{\infty}dx\, e^{-\frac{1}{2} ax^2}} = \frac{1}{a}$

推广到多模： $\dfrac{H[q]}{T} = \dfrac{H[\bar q]}{T} + \dfrac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\dfrac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}(q_\alpha-\bar q_\alpha)(q_\beta-\bar q_\beta) = \dfrac{H[\bar q]}{T} + \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\dfrac{q_k^2}{\lambda_k^2}$

$q_k$ 是简正坐标，是 $q_\alpha - \bar q_\alpha$ 的线性组合　　$\dfrac{1}{T}\dfrac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}$ 的本征值是 $\dfrac{1}{\lambda_k^2}$

$$\boxed{P(q_1, q_2, \cdots, q_N) \propto e^{-\frac{H[q]}{T}} = e^{-\frac{H[\bar q]}{T} - \frac{1}{2}\sum_k \frac{q_k^2}{\lambda_k^2}}}$$

- $\langle q_\alpha \rangle = \bar q_\alpha$，　• $\langle q_k \rangle = 0$，　• $\langle q_k^2 \rangle = \lambda_k^2$

- $\boxed{f = H[\bar q] - \dfrac{T}{2}\sum_k \ln(2\pi\lambda_k^2)}$

我们回到 L-G 作用量

1. $T > T_c$ 此时 $a_2 > 0$，位型 $\vec\sigma(\vec x) = 0$ 是最可几的，其它位型围绕其涨落：$\vec\sigma$ 小量

$$\sigma_{i\vec k} = \sum_{\vec x} e^{-i\vec k\cdot\vec x}\sigma_i(\vec x)$$

$$\frac{H[\sigma]}{T} = a_0 L^d + \frac{1}{2L^d}\sum_{k<\Lambda}\sum_{i=1}^{n}(a_2 + ck^2)|\sigma_{i\vec k}|^2$$

忽略 $(\sigma\cdot\sigma)^2$ 项

$\frac{1}{2}(a_2 + ck^2) = \dfrac{1}{2\lambda^2}$，　$P(\vec\sigma) \propto e^{-\frac{H[\sigma]}{T}}$，　$Z = \int \prod_{ik} d\sigma_{i\vec k}\, e^{-H[\sigma]/T}$

- $\langle \sigma_{ik} \rangle = 0$
- $f L^d = T a_0 L^d - \dfrac{1}{2}T\sum_{k<\Lambda} n\cdot\ln\left(\dfrac{2\pi L^d}{a_2 + ck^2}\right)$
- $\langle |\sigma_{ik}|^2 \rangle = \dfrac{L^d}{(a_2 + ck^2)}$

中子弹性散射截面

$$P_{fi} \propto \left\langle \left|\int d^d\vec x\ e^{-i\vec p_f\cdot\vec x}\sigma(\vec x)\, e^{i\vec p_i\cdot\vec x}\right|^2\right\rangle$$

定义 $\vec k = \vec p_f - \vec p_i$ 为散射过程中的动量转移


$$P_{fi} \propto \langle |\sigma_{\vec k}|^2 \rangle$$

实验发现，在 $T \to T_c$ 时，$k \to 0$ 的截面发散

$P_{fi} \propto k^{-2+\eta} V$　　　(V是体积)

$\eta$ 是个非常奇怪的 dimension：anomalous dimension，$P_{fi}$ 本来应该是面积的量纲

假设 $\langle\sigma\rangle$ 是自发磁化（不为零时对称破缺），定义 connected 关联函数

$$C(\vec{x}) = \langle(\sigma(0)-\langle\sigma\rangle)(\sigma(\vec{x})-\langle\sigma\rangle)\rangle$$

是自旋相对于 $\langle\sigma\rangle$ 的涨落的关联函数.

其傅立叶变换

$$G(\vec{k}) = \int d^d x \; C(\vec{x})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

也称为关联函数。

由于 $\langle\sigma\rangle$ 与 $\vec{x}$ 无关，因此 $\sigma(\vec{x})-\langle\sigma\rangle$ 与 $\sigma(\vec{x})$ 有相同的 $\sigma_{\vec{k}\neq 0}$.

对于 $\vec{k}\neq 0$ 的 modes，有

$$\langle|\sigma_{\vec{k}}|^2\rangle = \int d^d x_1 d^d x_2 \langle\sigma(\vec{x}_1)\,\sigma(\vec{x}_2)\rangle e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)} = V\int d^d x \,\langle\sigma(0)\,\sigma(\vec{x})\rangle\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = VG(\vec{k})$$

利用了平移不变性： $\langle\sigma(\vec{x}_1)\,\sigma(\vec{x}_2)\rangle = \langle\sigma(0)\sigma(\vec{x}_2-\vec{x}_1)\rangle$

对于 $\vec{k}\to 0$，$P_{fi}$ 发散，$\Rightarrow G(k\to 0) \propto k^{-2+y}$ 发散

$$G(k\to 0) = \int d^d x \,\langle(\sigma(0)-\langle\sigma\rangle)(\sigma(\vec{x})-\langle\sigma\rangle)\rangle \longrightarrow \infty$$

$\sigma(\vec{x})$ 与 $\sigma(0)$ 本身不发散. 所以是 $\sigma(0)-\langle\sigma\rangle$ 与 $\sigma(\vec{x})-\langle\sigma\rangle$ 在很大区域内同向!

回到高斯近似： $G(\vec{k}) = \dfrac{\langle|\sigma_{\vec{k}}|^2\rangle}{V} = (a_2+ck^2)^{-1}$

$$\lim_{T\to T_c} VG(\vec{k}) \propto k^{-2} \qquad (\because a_2 \propto T-T_c)$$

$$\lim_{k\to 0} VG(\vec{k}) \propto (T-T_c)^{-1} \propto \chi$$

$(\because \chi \propto \langle(\sum_x \sigma(x))^2\rangle - \langle\sum_x \sigma(x)\rangle^2$, at $T_c$, $\chi \propto V\, G(0))$

我们得到： $\boxed{y=0, \quad \gamma=1}$

再来计算比热：

$$C=-T\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}=-T\frac{\partial}{\partial T}\left(a_0-\frac{1}{2L^d}\sum_{k<\Lambda}n\left[\ln 2\pi L^d/(a_2+ck^2)\right]+\frac{T}{2L^d}\sum_{k<\Lambda}n\,(a_2+ck^2)^{-1}a_2'\right)$$

保留最奇异部分：

$$C\propto\frac{a_2'^2T^2n}{2L^d}\sum_{k<\Lambda}(a_2+ck^2)^{-2}=\frac{a_2'^2T^2n}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(a_2+ck^2)^2}$$

（用到 $a_2(T)=a_2'(T-T_c)$，$\sum_{k<\Lambda}\longrightarrow\int_0^\Lambda\frac{d^dk}{\left(\frac{2\pi}{La}\right)^d}$）

发散来自分母上的 $a_2\propto T-T_c$

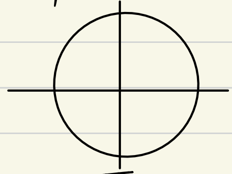
定义 $\frac{1}{\xi}=\left(\frac{a_2}{c}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a_2'}{c}\right)^{\frac{1}{2}}(T-T_c)^{\frac{1}{2}}$，$k=k'/\xi$，$\frac{d^dk}{(a_2+ck^2)^2}=\frac{\frac{1}{c^2}d^dk'\cdot\xi^{-d}c^2}{\left(1+\frac{c}{a_2}k^2\right)^2a_2^2}$

$$C_s=n\left[\frac{1}{2}\left(\frac{Ta_2'}{c}\right)^2\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dk'\frac{1}{(1+k'^2)^2}\right]\xi^{4-d}$$，乾坤大挪移！

- $k'$ 积分上限为 $\Lambda\xi$，当 $T-T_c\to0$ 时，$\Lambda\xi\to\infty$. 对 $d<4$，积分收敛

比热发散：$c\propto\xi^{4-d}\propto(T-T_c)^{-\frac{4-d}{2}}\Rightarrow\alpha=2-\frac{d}{2}$

临界指数 $\gamma=1$，$y=0$，$\alpha=2-d/2$ 与哈密顿细节无关



- 再来研究 $T<T_c$ 的情况

$h=0$ 时，最可几位形 $\vec\sigma(x)=\vec m_0$，设 $\vec m_0=(m_0,0,\cdots0)$，$m_0=\sqrt{\frac{a_2'}{a_4}}(T_c-T)^{\frac12}=\sqrt{\frac{-a_2}{a_4}}$

如果加上一个小的外场 $\vec h$，$\vec m_0$ 应该沿 $\vec h$ 的方向，设 $\vec h=(h,0,0,\cdots)$，$\hat h=(1,0,0,\cdots)$

那么 $\bar\sigma(x)=\left(m_0+\frac{h}{2a_4m_0^2}\right)\hat h\equiv\vec m$　　（推导：$a_2\vec\sigma+a_4\vec\sigma^3-\vec h=0$.

沿 $\hat h$ 方向：$\bar\sigma=m_0+\delta\Rightarrow\delta(a_2+a_4m_0^2+2m_0a_4\delta)-h=0$

$\delta=\frac{h}{2m_0^2a_4}$）

$\bar\sigma_{1,k=0}=\bar\sigma$,

$\vec k\neq0$，或 $\vec k=0$，$i\neq1$，$\bar\sigma_{i\vec k}=0$

$$\vec{\sigma}(\vec{x}) = \vec{m} + \Delta\vec{\sigma}(\vec{x}) \qquad \leftarrow \text{围绕 } \vec{m} \text{ 涨落}$$

$$\vec{\sigma}^2 = (\vec{m} + \Delta\vec{\sigma})^2 = m^2 + 2\vec{m}\cdot\Delta\vec{\sigma} + \Delta\vec{\sigma}^2 \qquad (m^2 = \vec{m}\cdot\vec{m})$$

$$\vec{\sigma}^4 = (\vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma})^2 = m^4 + 4m^2(\vec{m}\cdot\Delta\vec{\sigma}) + 2m^2\Delta\vec{\sigma}^2 + 4(\vec{m}\cdot\Delta\vec{\sigma})^2 \qquad (\text{保留到}(\Delta\vec{\sigma})^2)$$

$\Delta\vec{\sigma} = (\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n)$ 即可以在平行方向与垂直方向上涨落

$$\frac{a_2}{2}m^2 + \frac{a_4}{4}m^4 - h\left(m_0 + \frac{h}{2a_4 m_0^2}\right) = \frac{a_2}{2}\left(m_0^2 + \frac{h}{a_4 m_0}\right) + \frac{a_4}{4}\left(m_0^2 + \frac{h}{a_4 m_0}\right)^2 - h m_0$$

$$= \frac{a_2}{2}m_0^2 + \frac{a_2 h}{2a_4 m_0} + \frac{a_4}{4}m_0^4 + \frac{a_4}{2}\frac{h m_0}{a_4} - h m_0$$

$$= \frac{a_2}{2}\frac{(-a_2)}{a_4} + \frac{a_4}{4}\frac{(-a_2)^2}{a_4^2} = -\frac{a_2^2}{4a_4} = -\frac{(T-T_c)^2 a_2'^2}{4a_4}$$

$$\int\left[\frac{a_2}{2}\vec{m}^2 + \frac{a_4}{4}\vec{m}^4 - \vec{h}\cdot\vec{m}\right]d^dx = -L^d\frac{a_2'^2(T-T_c)^2}{4a_4} \equiv \frac{f_0 L^d}{T}$$

- $\overrightarrow{\Delta\sigma}(x)$ 的一次项系数和为0.

- 我们重点看$(\Delta\sigma)^2$项，$\hat{n}$方向与其它方向有耦合，通过$\sigma^4$项

$$(\vec{m}\cdot\Delta\vec{\sigma})^2 = (m_1\Delta\sigma_1)^2 = m^2\Delta\sigma_1^2,$$

$$\frac{a_2}{2}\Delta\sigma^2 + \frac{a_4}{4}\left[2m^2\Delta\sigma^2 + 4m\Delta\sigma_1^2\right] = A\,\Delta\sigma_1^2 + B\sum_{i\neq 1}\Delta\sigma_i^2$$

$$= \frac{a_2}{2}\Delta\sigma_1^2 + \frac{3a_4}{2}m^2\Delta\sigma_1^2 + \sum_{i\neq 1}^{n}\left(\frac{a_2}{2}\Delta\sigma_i^2 + \frac{a_4}{2}m^2\Delta\sigma_i^2\right)$$

代入 $m^2 = m_0^2 + \frac{h}{a_4 m_0} = \frac{-a_2}{a_4} + \frac{h}{a_4 m_0} \Rightarrow A = \frac{a_2}{2} - \frac{3a_2}{2} + \frac{3h}{2m_0} = a_4 m^2 + \frac{h}{2m_0}$

$$B = \frac{h}{2m_0}$$

最终：
$$\boxed{\frac{H[\sigma]}{T} = \frac{f_0 L^d}{T} + \sum_{\substack{k<\Lambda \\ k\neq 0}}\left(a_4 m^2 + \frac{h}{2m} + ck^2\right)|\sigma_{1k}|^2 + \left(\frac{h}{2m} + ck^2\right)\sum_{i=2}^{n}|\sigma_{ik}|^2}$$

将 $\frac{h}{2m}+4a_4m^2+ck^2$ 和 $\frac{h}{2m}+ck^2$ 视为 $\lambda_k^{-2}$，$\sigma_{i\vec{k}}-\bar{\sigma}_{ik}$ 为 $\delta_k'$

$$\langle\sigma_{i\vec{k}}\rangle=\bar{\sigma}_{ik}\begin{cases}\langle\sigma_{10}\rangle=\bar{\sigma}\\0\end{cases}$$

$$G_1(\vec{k})=\langle|\sigma_{1\vec{k}}|^2\rangle=\left[2a_2'(T_c-T)+ck^2\right]^{-1}\qquad(\text{取 } h=0)$$

$$G_\perp(\vec{k})=\langle|\sigma_{i+1,\vec{k}}|^2\rangle=\left[\frac{h}{2m}+ck^2\right]^{-1},$$

$$fL^d=\frac{\hat{H}[\bar{\sigma}]}{T}-\frac{T}{2}\sum_{k<\Lambda}\left[\ln\frac{2\pi}{a_2+ck^2}+(n-1)\ln\frac{2\pi}{ck^2}\right]\qquad(\text{取 } h=0)$$

$\sigma_{1k}$ 与 $\sigma_{i+1,k}$ 的表现不同，一个为纵模($\sigma_{1\vec{k}}$)的振幅，一个为横模

当 $k\to0$，$\chi\propto G_1(\vec{k})$　(外场与自发磁化方向同)

$$=\frac{1}{4a_2'(T_c-T)}$$

$\gamma=1$.

$$\chi_\perp\propto G_\perp(\vec{k})=\frac{m}{h}\quad\text{发散！}\quad\text{Goldstone modes.}$$

计算比热：($T\to T_c$，从 $T_c$ 以下)

$$C_s=-T\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}$$

① $\frac{\hat{H}(\bar{\sigma})}{T}$ 平均场 提供一个 有限跳跃. (与 $T\to T_c$，$T>T_c$ 比)

② 横模部分没有贡献 (与温度无关)

③ 纵模：

$$C_s\equiv 2^{\frac{d}{2}-2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{Ta_2'}{c}\right)^2\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dk'\,(1+k'^2)^{-2}\right]\xi^{4-d}$$

$$C_0'\,\xi^{4-d}$$

$$\frac{1}{\xi}=\left(\frac{a_2'}{c}\right)^{\frac{1}{2}}|T-T_c|^{\frac{1}{2}}$$