第十九讲

$$\frac{H[\sigma]}{T} = \int d^d x \ [a_0 + \frac{1}{2} a_2 \sigma^2 + \frac{1}{4} a_4 \sigma^4 + \frac{1}{2} c (\nabla\sigma)^2 + \cdots] = S$$

根据 $\delta S = 0$ 找到最可几位型. $P(\sigma) \propto e^{-S(\sigma)}$

在 $T > T_c$ 位型 $\vec{\sigma}(\vec{x}) = 0$ 是最可几的，

其它位型围绕其涨落: $\sigma_{i\vec{k}} = \sum_{\vec{x}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \sigma_i(\vec{x})$ 是"简正坐标"

$$\frac{H[\sigma]}{T} = a_0 L^d + \frac{1}{2L^d} \sum_{k<\Lambda} \sum_{i=1}^{n} (a_2 + ck^2) |\sigma_{i\vec{k}}|^2$$

- $\langle \sigma_{ik} \rangle = 0$
- $\langle |\sigma_{ik}|^2 \rangle = \frac{L^d}{(a_2 + ck^2)}$
- $f L^d = T a_0 L^d - \frac{1}{2} T \sum_{k<\Lambda} n \cdot \ln\left(\frac{2\pi L^d}{a_2 + ck^2}\right)$

$$c = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \qquad \frac{1}{\xi} = \left(\frac{a_2'}{c}\right)^{\frac{1}{2}} |T - T_c|^{\frac{1}{2}}$$

$$c \propto \xi^{4-d} \propto (T - T_c)^{-\frac{4-d}{2}} \Rightarrow \alpha = 2 - \frac{d}{2}$$

$T < T_c$ 的情况

最可几位型: $\vec{\sigma}(x) = \left(m_0 + \frac{h}{2a_4 m_0^2}\right) \hat{h} \equiv \vec{m} = \left(m_0 + \frac{h}{2a_4 m_0^2}, 0, 0, \ldots\right)$, $m_0^2 = \frac{-a_2}{a_4}$

考虑围绕 $\vec{m}$ 涨落 $\vec{\sigma}(\vec{x}) = \vec{m} + \Delta\vec{\sigma}(\vec{x})$

$$\frac{H[\sigma]}{T} = \frac{f_0 L^d}{T} + \frac{1}{2L^d} \sum_{\substack{k<\Lambda \\ k\neq 0}} \left[\left(2a_4 m^2 + \frac{h}{m} + ck^2\right) |\sigma_{1\vec{k}}|^2 + \left(\frac{h}{m} + ck^2\right) \sum_{i=2}^{n} |\sigma_{i\vec{k}}|^2 \right]$$

除 $i=1, k=0$ 外，$\vec{\sigma}(\vec{x})$ 与 $\Delta\vec{\sigma}(\vec{x})$ 的付立叶变换相同: $\sigma_{i\vec{k}}$

- $G_\parallel(\vec{k}) = \langle |\sigma_{1\vec{k}}|^2 \rangle = \dfrac{L^d}{[2a_2'(T_c-T) + ck^2]}$ （取 $h=0$）

- $G_\perp(\vec{k}) = \langle |\sigma_{i\neq 1,\vec{k}}|^2 \rangle = \dfrac{L^d}{[\frac{h}{m} + ck^2]}$,

- $f L^d = \dfrac{f_0 L^d}{T} - \dfrac{T}{2}\sum\limits_{k<\Lambda}\Big[\underbrace{\ln\dfrac{2\pi}{2a_2+ck^2}}_{\text{纵}} + \underbrace{(n-1)\ln\dfrac{2\pi}{ck^2}}_{\text{横}}\Big]$ （取 $h=0$）

  $P_{fi} \propto \langle |\sigma_{\alpha\vec{k}}|^2 \rangle$, $\alpha = 1, 2, \cdots, n$

假设 $\langle\sigma\rangle$ 是自发磁化（不为零时表对称破缺），定义 connected 关联函数

$$C_i(\vec{x}) = \langle (\sigma_i(0) - \langle\sigma\rangle)(\sigma_i(\vec{x}) - \langle\sigma\rangle) \rangle = \langle \Delta\sigma_i(0)\cdot\Delta\sigma_i(\vec{x}) \rangle$$

是自旋相对于 $\langle\sigma\rangle$ 的涨落的关联函数.

其傅立叶变换

$$G_i(\vec{k}) = \int d^dx\, C_i(\vec{x})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$ 也称为关联函数。

由于 $\langle\sigma\rangle$ 与 $\vec{x}$ 无关，因此 $\sigma_i(\vec{x}) - \langle\sigma\rangle$ 与 $\sigma_i(\vec{x})$ 在 $k\neq 0$ 时有相同的 σ_{ik}

对于 $\vec{k}\neq 0$ 的 modes，有

$$\langle |\sigma_{i\vec{k}}|^2 \rangle = \int d^dx_1 d^dx_2 \langle \sigma_i(\vec{x}_1)\sigma_i(\vec{x}_2) \rangle e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)} = V\int d^dx \langle \sigma_i(0)\sigma_i(\vec{x}) \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = V G_i(\vec{k})$$

这里利用了平移不变性： $\langle \sigma_i(\vec{x}_1)\sigma_i(\vec{x}_2) \rangle = \langle \sigma_i(0)\sigma_i(\vec{x}_2-\vec{x}_1) \rangle$

在Tc处，当 $\vec{k}\to 0$，P_{fi} 发散，$\Rightarrow G(k\to 0) \propto k^{-2+\eta}$ 发散（实验结果）

$$G(k\to 0) = \int d^dx \langle (\sigma(0) - \langle\sigma\rangle)(\sigma(\vec{x}) - \langle\sigma\rangle) \rangle$$

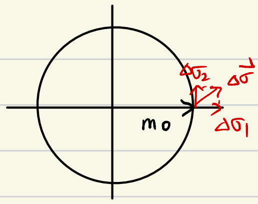
由于 $\sigma(\vec{x})$ 与 $\sigma(0)$ 本身不发散，所以是 $\sigma(0)-\langle\sigma\rangle$ 与 $\sigma(\vec{x})-\langle\sigma\rangle$ 在很大区域内同向造成。

回到高斯近似： $T > T_c$: $G_i(\vec{k}) = \dfrac{\langle |\sigma_{i\vec{k}}|^2 \rangle}{V} = (a_2 + ck^2)^{-1}$

$\lim\limits_{T\to T_c} V G(\vec{k}) \propto k^{-2}$ $(\because a_2 \propto T - T_c)$ $\Rightarrow \eta = 0$

$\lim\limits_{k\to 0} V G(\vec{k}) \propto (T-T_c)^{-1} \propto \chi$ $\Rightarrow \gamma = 1$

$T<T_c$：区分纵模与横模：



$$\lim_{T\to T_c} G_1(\vec k) \propto k^{-2} \quad\Rightarrow\quad \eta=0$$

$$\lim_{k\to 0} G_1(\vec k) \propto (T_c-T)^{-1} \propto \chi_1 \quad\Rightarrow\quad \gamma=1$$

$$\lim_{k\to 0} G_\perp(\vec k) \propto \frac{m}{h}$$

在 $h\to 0$ 时发散！没有 $\hat h$ 方向外场时，$\frac{\partial m_\perp}{\partial h_\perp}\to\infty$. 对⊥方向外场敏感

计算比热：($T\to T_c$，从 T_c 以下)

$$C_s = -T\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}$$

① $f_0\propto (T-T_c)^2$，提供一个有限的比热（对比 $T>T_c$，$f_0\to C=0$）

② 横模部分没有贡献（与温度无关）

③ 纵模：

$$C_s \equiv 2^{\frac{d}{2}-2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{Ta_2'}{c}\right)^2\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dk\,(1+k^2)^{-2}\right]\xi^{4-d}$$

$$\propto C_0'\,\xi^{4-d}$$

$$\frac{1}{\xi} = \left(\frac{a_2'}{c}\right)^{\frac{1}{2}}|T-T_c|^{\frac{1}{2}},$$

总的来看，关联函数，极化率（纵向），比热的行为都由 ξ 决定：

$T>T_c$，$\quad G(k)=A\frac{\xi^2}{1+k^2\xi^2}$，$\quad A=\frac{1}{2c}$

$$\chi = G(0) = A\xi^2 \qquad C_s = C_0\xi^{4-d}$$

$T<T_c$：$\quad G_1(k)=A'\frac{\xi^2}{1+k^2\xi^2/2}$，$\quad \chi_1 = A'\xi^2$，$\quad A'=\frac{1}{4c}$

$$C_s = C_0'\xi^{4-d}$$

• $\xi \propto |T-T_c|^{-\frac{1}{2}}$ 称为关联长度 (correlation length)：自旋涨落的关联距离

从坐标空间关联函数看得更清楚 $G(k) = \frac{A\xi^2}{1+k^2\xi^2}$

$$\langle \sigma(\vec{x})\sigma(\vec{x}+\vec{r})\rangle = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^d k\ G(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{A\xi^{2-d}}{(2\pi)^d}\int d^d k' \frac{e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}/\xi}}{1+k'^2} \quad (k'=k\xi)$$

k' 积分上限为 $\Lambda\xi$， $d=3$ 时

$$\boxed{\langle \sigma(\vec{x})\cdot\sigma(\vec{x}+\vec{r})\rangle \propto \frac{e^{-r/\xi}}{r}}$$

$\because \xi$ 是关联长度， $\nu = \frac{1}{2}$ ← 关联长度临界指数

奇异性都由 $\xi \to \infty$ 造成！

自由能密度： $f \sim \int d^d k \cdot \xi^d \cdot \xi^{-d} \propto \xi^{-d} \propto |T-T_c|^{-(2-d\nu)}$

$C \propto \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial (T-T_c)^2}$， 又 $\xi^{-\frac{1}{\nu}} \propto T-T_c$

$\Rightarrow C \propto \xi^{-d+2/\nu} \propto (T-T_c)^{-(2-d\nu)}$

即 $\boxed{\alpha = 2-d\nu}$

以上通过计算 ξ 的幂次 (powers) 导出了标度律 ← 指临界指数之间关系.

• d 越小 C 发散越厉害， $d>4$，不发散 (跳跃)

$d\le 2$， $n>1$. for $i\ne 1$：

$$\langle \sigma_i(\vec{x})\,\sigma_i(\vec{x}+\vec{r})\rangle = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\ G_\perp(\vec{k})\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \int_0^\Lambda \frac{dk\ k^{d-1}}{(2\pi)^d}\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\left(\frac{h}{m}+ck^2\right)}$$

$\left.\begin{array}{ll} d=1.\ h\to 0, & \text{上式} \propto \left(\frac{h}{m}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{发散} \\ d=2,\ h\to 0, & \text{上式} \propto \ln\left(\frac{h}{m}\right) \quad \text{发散} \end{array}\right\}$ 由于 $\sigma_i(\vec{x})$ 幅度有限，G 对任意 h 都应该有限 $\Rightarrow \therefore m$ 必须为零.

• Mermin-Wagner 定理的另一形式.

$d=1$， $n=1$， m 也必须为零. 参见马上庚，§3.7节

• 量纲分析： 定义 $\phi \equiv c^{\frac{1}{2}}\sigma$，改写LG作用量

$$S = \int d^d x \left[\frac{a_2}{2}\sigma^2 + \frac{a_4}{4}\sigma^4 + \frac{c}{2}(\nabla\sigma)^2\right] = \int d^d x \left[\frac{r_0}{2}\phi^2 + \frac{1}{4}u_0\phi^4 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right]$$

S 无量纲，e^{-S} 记 $[S]=1$.

$$\left[\int d^d x (\nabla\phi)^2\right] = 1 \Rightarrow L^d L^{-2}[\phi]^2 = 1 \Rightarrow [\phi] = L^{1-d/2}$$

$$\left[\int d^d x \, r_0 \phi^2\right] = 1 = \left[\int d^d x \, u_0 \phi^4\right] \Rightarrow [r_0] = L^{-2}, \quad [u_0] = L^{d-4}$$

与 $r_0 \propto T-T_c \propto \xi^{-2}$ 符合！

• 即 $r_0^{-\frac{1}{2}}$ 是个长度尺度(scale)，用 $r_0^{-\frac{1}{2}}$ 度量＝用ξ度量，设 $L_0 \equiv r_0^{-\frac{1}{2}}$

• 定义无量纲量： $\varphi = \dfrac{\phi}{L_0^{1-d/2}}$，$\vec{r} = \dfrac{\vec{x}}{L_0}$，$\bar{u}_0 = \dfrac{u_0}{L_0^{d-4}}$

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi \; e^{-H_0 - H_{int}}$$

$$H_0 = \int d^d r \left[\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}\varphi^2\right], \qquad H_{int} = \int d^d r \, \frac{1}{4}\bar{u}_0 \varphi^4$$

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi \; e^{-H_0}\left(1 - H_{int} + \frac{1}{2!}(H_{int})^2 + \cdots\right)$$

微扰对 $\bar{u}_0$ 作.

$$\bar{u}_0 = u_0 r_0^{-(4-d)/2} = u_0 \, a_2'^{\frac{d-4}{2}} \cdot t^{\frac{d-4}{2}}$$

当 $t \to 0$, $d<4$, $\bar{u}_0 \to \infty$!

$d>4$, $\bar{u}_0 \to 0$ MF 准确！

• 临界指数与量纲分析

$$\langle \phi(\vec{r})\phi(\vec{r}')\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \; e^{-S}\phi(r)\phi(r')}{\int \mathcal{D}\phi \; e^{-S}}$$

$$[\langle \phi(\vec{r})\phi(\vec{r}')\rangle] = [\phi]^2 = L^{2-d}$$

$$G(k) = \int \langle \phi(r)\phi(\vec{r}')\rangle e^{ikr} d^d r$$

$$[G(k)] = L^d \cdot L^{2-d} = L^2$$

假设我们改变单位 $L_0 \to L_0' = b L_0$，使得 $L'(bL_0) = L(L_0)$ 即 $\boxed{L' = \frac{1}{b} L}$

$$G(k) \to G'(k') = b^{-2} G(k) \qquad (G' \cdot (bL_0)^2 = G L_0^2 \text{ 不变}) \qquad (1)$$

where: $k' = bk$ $\quad (\because [k] = L^{-1},\ k' \cdot \frac{1}{bL_0} = k \frac{1}{L_0})$

称：$G(k)$ 的标度维数为 "-2"，L 的标度维数为 "-1"，k 的 scaling dim $= 1$

高斯近似告诉我们

$$G(k) = \frac{1}{r_0 + k^2}$$

考虑标度变换 $L_0 \to bL_0$，则 $r_0' = b^2 r_0$，$k'^2 = b^2 k^2$，

$$G'(k') = b^{-2} \; G(k)$$

符合一般性的结论 (1).

然而在 T_c，我们知道 from 实验.

$$G(k) \propto k^{-2+y}$$

即标度变换关系为

$$G'(k') = b^{-2+y} G(k) \qquad (2)$$

(1) 与 (2) 孰对孰错？

再考虑 $[\xi] = L$，而 $[r_0] = L^{-2}$，又 $r_0 \propto t$

$$\Rightarrow \quad \xi \propto r_0^{-\frac{1}{2}} \propto t^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \nu = \frac{1}{2}$$

但我们知 $\nu \neq \frac{1}{2}$.（一般）

这是临界现象的最神秘的地方！ 量纲分析失败！

答案是：

$$\boxed{G(k, T_c) \propto a^y k^{-2+y}} \qquad (3)$$

a 是晶格常数.（或 $a = \frac{1}{\Lambda}$，分辨率，cut-off）

也就是说，一定有另外一个长度尺度（除 $r_0^{-\frac{1}{2}}$ 之外）进入量纲分析，并且该尺度是微观尺度 $\frac{1}{\Lambda}$.

(3) 式的标度变换为：

$$G'(k', T_c) = b^{-y} b^{2+y} a^y k^{-2+y} = b^{2} G(k, T_c)$$

固定 k，改变 a，$\quad G \sim a^y$；固定 a，改变 k，$G \sim k^{-2+y}$

再来看对 ξ 的量纲分析：加上 $[a]=L$，利用 $r_0 \propto t$

$$\xi = r_0^{-\frac{1}{2}} f(r_0 a^2) \qquad \leftarrow [r_0 a^2] = L^0$$

上式符合量纲分析。

当 $T \to T_c$，$r_0 a^2 \to 0$. 若 当 $x \to 0$，$f(x) \propto x^{\theta}$，θ 是某未知数.

则

$$\xi \propto t^{-\frac{1}{2}+\theta} a^{2\theta}$$

这样

$$\nu = \frac{1}{2} - \theta$$

并且量纲分析得以成立！ θ 也是一个 anomalous dimension！

一般人们认为，在 T_c 附近，$\xi \gg a$，可以忽略微观细节 a，将 $\frac{a}{\xi}$ 代为 0.

后果是平均场或简单量纲分析的结果.

然而前面的分析表明这是不对的，不能简单把 $f(a/\xi) \to f(0)$，或者说不能简单认为"在临界点附近，唯一重要的长度尺度是关联长度".

正是"借助于"微观尺度 $\frac{1}{\Lambda}$，我们才"造出"了 anomalous dimension.

数学上：当 $x = \frac{a}{\xi}$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$

当 $f(x)$ 非奇异，比如 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum\limits_{n=0} a_n x^n$，我们可以说

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = a_0$$

当 $f(x)$ 奇异，结论是：$\lim\limits_{x\to 0} f(x) \propto x^{-\sigma} \phi(x)$，$\phi(x)$ regular at $x \to 0$