第二十讲

§.标度理论

标度假设：临界性质由 T_c 附近 $\Lambda\cdot\xi=\frac{\xi}{1/\Lambda}$ 发散决定！ 暂时不考虑 $a=\frac{1}{\Lambda}$ 的作用.

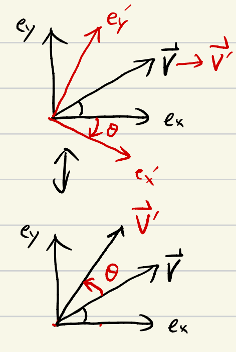
标度变换：长度单位由 $L_0\longrightarrow L_0'=bL_0$ 标度因子 (scaling factor) $b>1$

$\xi\longrightarrow\xi'=\xi/b$ 标度维数 $\Delta_\xi=-1$

$\Delta x\longrightarrow\Delta x'=\frac{\Delta x}{b}$ $\Delta_{\Delta x}=-1$

$k\longrightarrow k'=b\cdot k$ $\Delta_k=1$

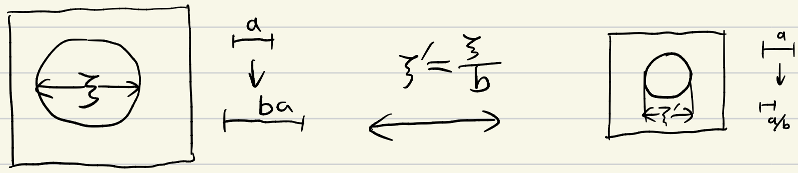
在新的单位下，长度值缩小为 $\frac{1}{b}$，波矢值k放大为 b 倍，



主动与被动语言

类似于在一个新的坐标系里看原来的矢量：$\vec{v}\rightarrow\vec{v}'=R(\theta)\vec{V}$

等价于 坐标系不变，旋转矢量



所有物理量都随之改变：缩放，称为 scaling

$A\longrightarrow A'=b^{\Delta_A}A$， Δ_A 就是 A的 scaling dimension， 假设 $[A]=L^{D_A}\rightarrow A'(bL_0)^{D_A}=AL_0^{D_A}$

$\rightarrow A'=b^{-D_A}A\rightarrow\Delta_A=-D_A$

例如：

- $V=L^d\longrightarrow V'=b^{-d}L^d=b^{-d}V$ $\therefore\Delta_V=-d$

- 约化温度 $t=T-T_c$： ($[r_0]=L^{-2}\Rightarrow[t]=L^{-2}$ 与此矛盾，但 $\xi=r_0^{-\frac{1}{2}}f(r_0a^2)\sim t^{-\frac{1}{2}+0}a^{2\cdot 0}$ 我们固定 a，怎样固定 a 又标度变换？)

由于 $t\propto\xi^{-\frac{1}{\nu}}$

$\Rightarrow t'=(\xi b^{-1})^{-\frac{1}{\nu}}=b^{\frac{1}{\nu}}t$， $\therefore\boxed{\Delta_t=\frac{1}{\nu}}$ 文献习惯用 y_t

- $G'(k')=b^{-2+\eta}G(k)$ $\Rightarrow\Delta_G=-2+\eta$. (也是固定 a，缩放scale)

[$[G(k)]=L^2$ 本来 $\Delta G=-2$
但是实验：$[G(k)]\sim k^{-2+\eta}$
$G(k,T_c)\sim a^\eta k^{-2+\eta}$，固定 a)

由于 $G(k)=\int\langle\phi(0)\phi(\vec{r})\rangle e^{ikr}d^dr$

令 $\phi(r)\longrightarrow\phi'(r')=b^x\phi(r)$ 代入上式.

$2x-d=-2+\eta$ $\Rightarrow x=\frac{d-2+\eta}{2}$ 即 $\boxed{\Delta_\phi=\frac{1}{2}(d-2+\eta)}$

- $\phi_k=\int\phi(r)e^{ikr}d^dr\Rightarrow[\phi_k]=L^d\cdot L^{-\frac{1}{2}(d-2+\eta)}=L^{\frac{1}{2}(d+2-\eta)}$

$\Rightarrow\boxed{\Delta_{\phi_k}=-\frac{1}{2}(d+2-\eta)}$

- 总的磁场能 $h\phi L^d$ 不随尺度单位变化（S中的一项，$[h\phi L^d]=L^0$）

$$\therefore\ h'\phi' L'^d = h\phi L^d \Rightarrow b^y h\, b^x \phi\, b^{-d} L^d = h\phi L^d \Rightarrow y = d - x = \frac{d+2-\eta}{2}$$

即 $\boxed{\Delta_h = \frac{d+2-\eta}{2}}$，习惯记号 y_h

作用量中含 $\int d^d x\ g_O O(x)$，则满足

$$\boxed{\Delta_{g_O} = d - \Delta_O}$$

同样 $f L^d$ 标度不变 $\Rightarrow f' = b^d f \Rightarrow \Delta_f = d$

可以统一用 ξ 来描述：

$$t \propto \xi^{-y_t},\quad h \propto \xi^{-y_h},\quad f \propto \xi^{-d},\quad \phi \sim \xi^{y_h - d}$$

导出标度律： $\phi \to m$

$$\left.\begin{array}{l} m \propto t^{\beta} \sim \xi^{-\frac{\beta}{\nu}} \\ m \propto \xi^{-\Delta_m} \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = \nu\Delta_m = \frac{\nu}{2}(d-2+\eta)$$

$$\left.\begin{array}{l} f \sim \xi^{-d} \\ t \sim \xi^{-y_t} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c = -T\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \sim \xi^{-(d-2y_t)} \\ c \sim t^{-\alpha} \end{array}\right\} \alpha = 2 - \frac{d}{y_t} = 2 - \nu d$$

$$\left.\begin{array}{l} \chi = \frac{dm}{dh} \propto \xi^{-\Delta_m + \Delta_h} = \xi^{d-2\Delta_m} = \xi^{2-\eta} \\ \chi \propto t^{-\gamma} \end{array}\right\} \gamma = \nu(2-\eta)$$

$$m \propto h^{\frac{1}{\delta}} \Rightarrow \xi^{-\Delta_m} \propto \xi^{-\Delta_h/\delta} \Rightarrow \delta = \frac{\Delta_h}{\Delta_m} = \frac{d+2-\eta}{d-2+\eta}$$

所有指数都可用 ν 与 η 表出，或 y_t 与 y_h 表出！

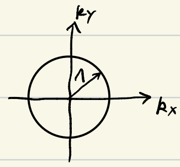
3 重正化群 (The renormalization Group)

- RG的定义

标度分析给出了很多重要结果，特别是标度律 scaling law，建立了临界指数之间的关系。
但是它是不易懂的，有"人为"的味道：当长度的单位变化了，所有的长度，不论长短都应该相应变化（缩放），怎么可以只改变 ξ 不改变 $a=\frac{1}{\Lambda}$？
怎样在保持 a 不变的前提下，缩放系统？下面我们从 LG 作用量出发，定义这样的变换
这就是重正化变换（RG）

$$\frac{H(\sigma)}{T} = \int d^dx \left[\frac{a_2}{2}\sigma^2(\vec{x}) + \frac{a_4}{4}\sigma^4(\vec{x}) + \frac{c}{2}(\nabla\sigma(\vec{x}))^2\right] \longrightarrow S$$

块哈密顿，块大小 $a=\frac{1}{\Lambda}$



$$= \frac{1}{L^d}\sum_{k<\Lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}|\sigma_{ik}|^2(a_2+ck^2) + \frac{1}{L^{3d}}\sum_{k_1k_2k_3k_4}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_4}{4}\,\sigma_{ik_1}\sigma_{ik_2}\sigma_{jk_3}\sigma_{jk_4}\,\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)$$

$$\frac{1}{L^d}\sum_{k<\Lambda} \longrightarrow \int_0^\Lambda \frac{d^dk}{(2\pi)^d}$$

$p \propto e^{-S}$ 是位形出现的几率分布，由 $\vec{\mu} = (a_2, a_4, c)$ 标记。称参数空间。

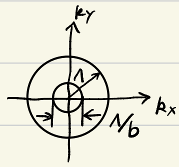
RG变换这样定义 R_b：$\vec{\mu}' = R_b\vec{\mu}$，使得 $p\sim e^{-S} \longrightarrow p'\sim e^{-S'}$

尺寸收缩为 $\frac{1}{b}$，但是 $a=\frac{1}{\Lambda}$ 不变！

RG变换分两步完成：

1. 对 S_Λ 作 Kadanoff 变换 K_b，也就是之前讨论过的粗粒化

$$\tilde{S}_{\frac{\Lambda}{b}} = \hat{K}_b S_\Lambda$$

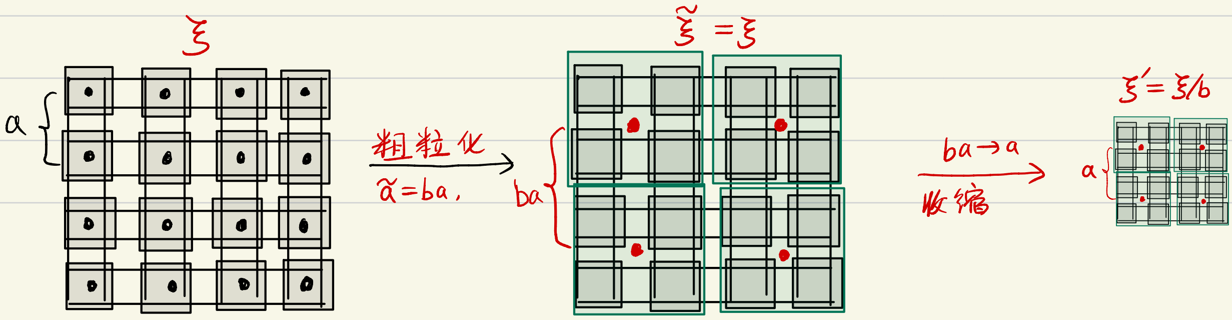


块尺寸由 $a=\frac{1}{\Lambda}$ 变为 $a'=\frac{b}{\Lambda}$.

$$e^{-\tilde{S}-AL^d} = \int e^{-S}\prod_{i,\Lambda>k>\Lambda/b} d\sigma_{ik},$$

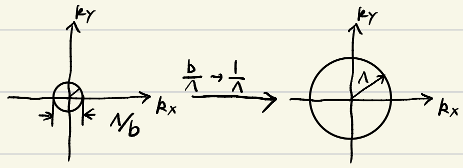
e^{-AL^d} 是积分常数的常数，$\tilde{p}\sim e^{-\tilde{S}}$

如果我们对 $\frac{1}{\Lambda}$ 距离之内的变化不感兴趣，那么 $\tilde{p}\sim e^{-\tilde{S}}$ 与 $p\sim e^{-S}$ 等价



2. 对块自旋重新标度.（标度变换）

将尺寸收缩为原来的 $\frac{1}{b}$，等价于以 bL 代替 L。



分辨率（块尺寸）从 $\frac{b}{\Lambda}$ 回到 $\frac{1}{\Lambda}$.

$$k \longrightarrow k' = bk, \qquad \xi \longrightarrow \xi' = \xi/b$$

在两步之后，微观尺度 a 没有变，但是 ξ' 收缩成原来的 $\frac{1}{b}$！

因此 $[G(k)] = L^{2-y} a^{y} \Rightarrow \sigma'_{ik'} = b^{-\frac{d}{2}-1+y/2}\sigma_{ik}$，即 $\Delta\sigma_{ik} = -\frac{1}{2}(d+2-y)$

$= V^{-1}[|\sigma_{ik}|^2] \Rightarrow [\sigma_{ik}] = L^{d+2-y} \cdot a^{y}$

尽管我们还不知道 y 的值.

这样我们写出 S':

$$S'[\sigma_{ik}] = \tilde{S}[\sigma_{ik}]_{\sigma_{ik}\to\lambda_b\sigma_{i,bk}}, \qquad \lambda_b = b^{\frac{1}{2}(d+1-\frac{y}{2})}$$

S' 也是 LG 形式.

$$S' = \frac{1}{L^d}\sum_{k<\Lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}|\sigma_{ik}|^2(a_2' + c'k^2) + \frac{1}{L^{3d}}\sum_{k_1k_2k_3k_4}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_4'}{4}\sigma_{ik_1}\sigma_{ik_2}\sigma_{jk_3}\sigma_{jk_4}\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)$$

对应参数空间里一个新点 $\vec{u}' = (u_2', u_4', c')$

这样我们就完成了定义：$\vec{u}' = R_b\vec{u}$

注意：$\lambda_b = b^a$，a与b无关，R_b才有性质

$$R_{b'} R_b = R_{b'b}$$

因为 $K_{b'} K_b = K_{b'b}$，加上 $\lambda_{b'} \lambda_b = \lambda_{b'b}$ 才可保证上式.

RG是粗粒化后作标度变换，保证块尺寸不变(cut-off不变)，但是改变了关联长度！ 在临界点可得到真正的标度不变！

一些讨论

- $\vec{m}$ 决定的几率分布 P 与 $\vec{m}'$ 决定的 P' 计算出的统计平均有简单的关系

$$\langle |\sigma_{\vec{x}}|^2 \rangle_P = \lambda_b^2 \langle |\sigma_{b\vec{x}}|^2 \rangle_{P'}$$

例：将L-G作用量写为（约定记号）

$$S=\frac{1}{2}\int d^dx\,[r_0\sigma^2+\frac{1}{4}u\sigma^4+c(\nabla\sigma)^2]$$

$$=\frac{1}{2L^d}\sum_{k,i}(r_0+ck^2)|\sigma_{ik}|^2+\frac{u}{8L^{3d}}\sum_{\vec{k}_1\cdots\vec{k}_4}\sum_{ij}\sigma_{i\vec{k}_1}\sigma_{i\vec{k}_2}\sigma_{j\vec{k}_3}\sigma_{j\vec{k}_4}\delta(\vec{k}_1+\cdots\vec{k}_4)$$

其中 $k<\Lambda$，块大小为 $\frac{1}{\Lambda}$.

定义参数空间 $\vec{\mu}=(r_0,u,c)$

考虑 $u=0$，也就是高斯近似，那么

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^\Lambda\frac{d^dk}{(2\pi)^d}(r_0+ck^2)|\sigma_{i\vec{k}}|^2$$

- 先作粗粒化，即积掉 $k>\frac{\Lambda}{b}$ 的部分：这是简单的高斯积分

$$e^{-\tilde{S}-AL^d}=\int\prod_{\frac{\Lambda}{b}<k<\Lambda}\prod_i d\sigma_{ik}\;e^{-S}$$

其中：
$$e^{-AL^d}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{\frac{\Lambda}{b}<k<\Lambda}\left(\frac{2\pi}{r_0+ck^2}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow AL^d=-\frac{n}{2}\sum_{\frac{\Lambda}{b}<k<\Lambda}\ln\frac{2\pi}{r_0+ck^2}$$

$$\tilde{S}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\frac{\Lambda}{b}}\frac{d^dk}{(2\pi)^d}(r_0+ck^2)|\sigma_{ik}|^2=\frac{1}{2}\frac{1}{L^d}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k<\frac{\Lambda}{b}}(r_0+ck^2)|\sigma_{ik}|^2$$

- 第二步 标度变换：$\frac{b}{\Lambda}\xrightarrow{\text{收缩}}\frac{1}{\Lambda}$，$k\longrightarrow k'=bk$，$\sigma_{ik}\to\sigma'_{ik'}=b^{-\frac{d}{2}-1+\frac{\eta}{2}}\sigma_{ik}$，$L\to L'=L/b$

$$S'=\frac{1}{2}\frac{1}{(bL')^d}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k'<\Lambda}(r_0+cb^{-2}k'^2)b^{d+2-\eta}|\sigma'_{ik'}|^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^\Lambda\frac{d^dk}{(2\pi)^d}(b^{2-\eta}r_0+b^{-\eta}ck^2)|\sigma_{ik}|^2$$

最终：$\boxed{\vec{\mu}'=R_b\vec{\mu}=(r_0b^{2-\eta},0,cb^{-\eta})}$　　其中 η 为待定常数